Annales de l'agrégation externe de mathématiques de 1958 à 1965

Énoncés

Dany-Jack Mercier
pour MégaMaths

3 mai 2020

Annales de l'agrégation externe de 1958 à 1965

Agrégation 1958, 2ème comp. (Analyse & probabilités)
Agrégation 1959
Agrégation 1959, 2ème comp. (Analyse & probabilités)
Agrégation 1960 (Epreuves obligatoires, options et épreuves féminines)
Agrégation 1961 (Analyse)
Agrégation 1961 (Epreuves obligatoires, options et épreuves féminines)
Agrégation 1962, 1ère comp. (Mathématiques Générales)
Agrégation 1962, 2ème comp. (Analyse & probabilités)
Agrégation 1965, 1ère comp. (Mathématiques Générales)
Agrégation 1965, 2ème comp. (Analyse & probabilités)

Topologie sur $\mathcal{A}(X,Y)$	Y est :	$\mathcal{A}$ (X,Y) est :	$\mathcal{C}$ (X,Y) est	Si X est	Cas de parties de $\mathcal{A}$ (X,Y)
$\mathcal{C}.C.\mathcal{S}$ Moins fine : $f \mapsto f(x)$ continue. Identifiable à celle de Y^X. Topologie convergence simple. T.C.S	compact connexe séparé	compact connexe séparé	non fermé dans $\mathcal{A}$ (X,Y)	aucune topologie requise	$\mathcal{F}$ relativement compacte $\Leftrightarrow \mathcal{F}(x)$ aussi. $\mathcal{F}$ relativement compacte dans $\mathcal{C}(X,Y)$ $\Leftrightarrow \mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,Y)$ et $\bar{\mathcal{F}}(X,Y)$ r.k. $\mathcal{F}$ équicontinue $\Leftrightarrow$ $\bar{\mathcal{F}}$ aussi.
$\mathcal{C}$.C.U Définie par $e(f,g) = \sup_{x \in X} [f(x),g(x)$ Topologie convergence uniforme. T.C.U.	M E T R I Q U E — complet →	M E T R I S A B L E — complet →	Fermé dans $\mathcal{A}$ (X,Y) — Si → — complet	X est muni → d'une topologie,	T.C.S = T.C.U Sur toute partie équicontinue — → Compact: $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,Y)$ relativement compacte si X est... ⟺ $\mathcal{F}$ équicontinue et $\mathcal{F}(x)$ relativement compacte.
T.C.K. $\mathcal{G}$ = {A compact} $e_A(f,g) = \sup_{x \in A} d(f(x)g(x)$ Topologie convergence compacte. T.C.K.	Métrique	Métrisable $e_A(f,g)$	$\mathcal{C}$ (X,Y) reste fermé dans $\mathcal{A}$ (X,Y) — Si →	X est localement compact	Théorème de Stone-Weierstrass : .Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ où X est métrique compact. a) Si $\mathcal{A}$ ne s'annule en aucun point, i.e. si $\forall x \in X$, $f \in \mathcal{A}$ et $f(x) \neq 0$. b) Si $\mathcal{A}$ sépare les points, i.e. $\forall (x_1,x_2)$, $x_1 \neq x_2$ $\exists f \in \mathcal{A}$ et $f(x_1) \neq f(x_2)$. Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ pour T.C.U. Dans le cas complexe, si, de plus, lorsque $f \in \mathcal{A}$, alors $\bar{f} \in \mathcal{A}$, on a $\mathcal{A}$ soit dense dans $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X)$.

Agrégation 1958, 2ème comp. (Analyse & probabilités)

PROBLÈMES

Année 1958

RÉVISION DE TECHNIQUES ÉLÉMENTAIRES D'ANALYSE

ÉNONCÉ

I

t et z désignant deux variables complexes indépendantes, donner les développements en série entière de z des fonctions e^{zt} et $e^{\frac{z}{t}}$. En déduire un développement de $g(z, t) = e^{z(t+\frac{1}{t})}$ suivant les puissances négatives, nulles et positives de t :

$$g(z, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n(z)\, t^n$$

Pour quelles valeurs de z et de t ce développement est-il valable ?

Comparer $f_n(z)$ et $f_{-n}(z)$. Vérifier quel'on a, pour $n \geqslant 0$:

$$(1) \qquad f_n(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^{n+2m}}{m!\,(n+m)!}$$

On définit $a_n(z)$ par l'égalité

$$(2) \qquad f_n(z) = \frac{z^n}{n!}\,[1 + a_n(z)]$$

Montrer que $a_n(z)$ tend vers 0, quand n tend vers l'infini, uniformément pour $|z| \leqslant M$, M étant un nombre positif quelconque. Montrer également que, z et z' étant deux nombres dont le module est inférieur à M, et ε un nombre positif arbitraire, il est possible de déterminer un nombre N ne dépendant que de M et de ε tel que l'inégalité $n > N$ entraîne :

$$(3) \qquad |a_n(z) - a_n(z')| \leqslant \varepsilon\, |z - z'|$$

Montrer que les fonctions $f_n(z)$ sont holomorphes pour tout z et s'expriment par les intégrales :

(4) $$f_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma g(z, t)\, t^{n-1}\, dt$$

où γ désigne une courbe convenable du plan de la variable t.

Vérifier que $f_n(z)$ satisfait à l'équation différentielle :

(5) $$z^2 \frac{d^2 f_n}{dz^2} + z \frac{df_n}{dz} - (4z^2 + n^2) f_n = 0.$$

Montrer que si la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n t^n$ converge uniformément vers $g(z, t)$ pour $|t| = r > 0$, z étant fixé, on a $c_n = f_n(z)$ quel que soit n. En supposant seulement que $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n t^n$ converge vers $g(z, t)$ pour deux valeurs de t de modules distincts, peut-on conclure aux égalités $c_n = f_n(z)$?

II

Dans cette partie, ainsi que dans la quatrième, on se propose d'étudier les séries de la forme :

(6) $$\sum_0^\infty a_n f_n(z)$$

où les a_n désignent des coefficients numériques et où les $f_n(z)$ sont les fonctions définies par (1).

Montrer que ces séries possèdent en général un "rayon de convergence" $R \geqslant 0$ jouissant de propriétés analogues à celui d'une série entière. Exprimer R à l'aide de la suite des a_n.

On suppose dorénavant $R > 0$; pour $|z| < R$, la série (6) converge ; soit $h(z)$ sa somme. Montrer que $h(z)$ est holomorphe pour $|z| < R$. On veut examiner si, réciproquement, toute fonction $k(z)$ holomorphe dans un cercle ayant l'origine pour centre est la somme d'une série (6). Dans ce but, on établira d'abord l'égalité :

(7) $$z^m = \frac{m!}{2i\pi} \int_{\gamma'} u^{m-1} e^{\frac{z}{u}}\, du \qquad m \text{ entier positif}$$

où γ' désigne une courbe convenable du plan de la variable u ; puis, en faisant le changement de variable $u = \frac{t}{t^2 + 1}$ et en utilisant le développement de u^m en série entière de t, on établira la formule :

(8) $$z^m = \sum_{p=0}^\infty (-1)^p (m + 2p) \frac{(m + p - 1)!}{p!} f_{m+2p}(z)$$

Cette formule est-elle valable pour $m = 0$? Quel est le domaine de validité de la représentation de $k(z)$ par une série (6) ? Cette représentation est-elle unique ? Donner les valeurs des coefficients a_n relatifs aux fonctions $k(z) = e^{cz}$ où c désigne un nombre indépendant de z. Pourrait-on, à partir de là, retrouver la formule (8) ? Effectuer les calculs correspondants, pour $m = 0$ et $m = 1$.

III

Cette partie est indépendante des précédentes. On se propose d'y établir certaines propriétés des séries entières qu'on étendra, dans IV, aux séries (6). On sait que, si la série $\sum_0^\infty b_n$ converge, la série $\sum_0^\infty b_n x^n$ converge uniformément pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et que, en particulier, il en résulte l'égalité :

(9) $$\lim_{x \to 1-0} \sum_0^\infty b_n x^n = \sum_0^\infty b_n$$

le symbole $x \to 1 - 0$ signifiant que x tend vers 1 par valeurs inférieures à 1.

Montrer, en utilisant un développement en série entière classique, que le premier membre de (9) peut exister bien que la série figurant au second membre diverge.

En supposant que chaque nombre b_n soit astreint à la seule condition :

(10) $$n\,|b_n| \leqslant 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

et en posant :

$\sum_0^\infty b_n x^n = \varphi(x)$, pour $0 \leqslant x < 1$, démontrer l'égalité :

(11) $$\left|\varphi(x) - \sum_0^n b_n\right| < \sum_1^n \frac{n}{p} + \text{Log}(1 - x) + 2 \int_0^x \frac{u^n}{1 - u}\, du$$

En déduire l'inégalité suivante, où A_* désigne une constante absolue :

$$(12) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\varphi(1-\tfrac{1}{n}) - \sum_{0}^{n} b_p\right| \leqslant A.$$

A-t-on, dans les mêmes conditions.

$$\overline{\lim_{x\to 1-0}} \left|\varphi(x) - \sum_{0}^{E(x)} b_p\right| \leqslant A$$

dans laquelle $E(x)$ désigne la partie, entière du nombre $\frac{1}{1-x}$?.

Montrer que l'égalité $\lim_{n\to\infty} nb_n = 0$ implique l'égalité :

$$\lim_{x\to 1-0} \left[\varphi(x) - \sum_{0}^{E(x)} b_p\right] = 0$$

IV

Adapter aux séries (6) les diverses propriétés énoncées ou démontrées en III dans le cas des séries entières. Il sera utile de démontrer d'abord l'égalité :

$$\lim_{x\to R-0} \left[\sum_{0}^{\infty} a_n f_n(x) - \sum_{0}^{\infty} a_n f_n(R) \left(\frac{x}{R}\right)^n\right] = 0$$

valable lorsque l'ensemble des nombres $a_n f_n(R)$ est borné supérieurement, et où R désigne le "rayon deconvergence", supposé positif, de la série (6) considérée.

V

On considère l'équation fonctionnelle :

$$(13) \qquad \psi(x) = \lambda \int_0^1 t\, e^{-n\left|\log \frac{x}{t}\right|} \psi(t)dt \qquad 0 < x \leqslant 1$$

où λ désigne un nombre réel fixe et n un entier positif ; $\psi(x)$ est une fonction inconnue qu'on suppose bornée et intégrable pour $\varepsilon \leqslant x \leqslant 1$, quel que soit $\varepsilon > 0$, et telle que l'intégrale $\int_0^1 |\psi(t)|dt$ ait un sens.

Il pourra être commode de décomposer l'intervalle d'intégration (0, 1) en les intervalles partiels (0, x) et (x, 1).

Déduire successivement de l'équation (13) et des conditions imposées à $\psi(x)$ que :

$\psi(x)$ est continue pour $0 < x \leqslant 1$;

$\psi(x)$ tend vers 0 avec x. On posera $\psi(0) = 0$;

$\psi(x)$ a une dérivée pour $0 < x < 1$, ainsi qu'une dérivée à droite et une dérivée à gauche respectivement pour $x = 0$ et $x = 1$.

$\psi(x)$ a une dérivée seconde pour $0 < x < 1$.

Montrer en outre que $\psi(x)$ satisfait à l'équation différentielle :

$$(14) \qquad x^2\psi'' + x\psi' + (2\lambda n\, x^2 - n^2)\psi = 0.$$

En déduire les conséquences suivantes :

Si $f_{n-1}\left(i\sqrt{\frac{n\lambda}{2}}\right) \neq 0$, l'équation (13) n'admet que la solution banale identiquement nulle.

Si $f_{n-1}\left(i\sqrt{\frac{n\lambda}{2}}\right) = 0$, l'équation (13) admet la solution :

$$\psi(x) = C\, f_n\left(ix\sqrt{\frac{n\lambda}{2}}\right)$$

où C désigne une constante arbitraire.

On veut établir que la condition précédente est réalisable. Pour cela, on montrera d'abord (ou on admettra) que $f_{n-1}(z)$ a une infinité de zéros qui ne peuvent d'ailleurs pas être réels non nuls ; désignant par a et b deux constantes, on formera les équations différentielles satisfaites par $u(x) = f_{n-1}(ax)$ et $v(x) = f_{n-1}(bx)$ et on en déduira que $x(u'v - uv')$ est une primitive de $4(a^2 - b^2)\, xuv$. Enfin, en considérant l'intégrale :

$$\int_0^1 x f_{n-1}(ax)\, f_{n-1}(bx)dx$$

pour des valeurs convenables de a et b, on montrera que l'hypothèse de l'existence de zéros de $f_{n-1}(z)$ non imaginaires purs conduit à une contradiction.

$f_{n-1}(ax) = \overline{f_{n-1}(bx)}$ donc $\int_0^1 x|f_{n-1}(ax)|^2 \, dx = 0$

($u(1) = v(1) = 0$!) et par suite $f_{n-1}(ax) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$ ce qui est <u>absurde</u>. Toutes les racines de f_{n-1} sont donc imaginaires pures

Montrons qu'il en existe une infinité :

$$f_{n-1}(ix) = i^{n-1} x^{n-1} \sum_0^\infty \frac{(1)^m x^{2m}}{m!(n-1+m)!} = i^{n-1} x^{n-1} \tilde{f}_{n-1}(x).$$ De la

convergence uniforme sur $[0,1[$ de $\sum \frac{2m\,(-1)^m x^{2m-1}}{m!\,(n-1+m)!}$ on déduit que $\tilde{f}'_{n-1}$ existe

et $\tilde{f}'_{n-1}$ existe et $\tilde{f}'_{n-1} - 2x\,\tilde{f}_n = 0$. D'où il résulte que si $\tilde{f}_{n-1}$ (donc $\tilde{f}'_{n-1}$!) a une infinité de zéros réels, $\tilde{f}_n$ aussi. Il suffit donc de <u>regarder $\tilde{f}_0(x) = f_0(ix)$</u>

or $$f_0(Z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(Z,t) \frac{dt}{t}$$

et $$\tilde{f}_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(2x \cos\theta)\, d\theta$$

$$\tilde{f}_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{2x} \frac{\cos u}{\sqrt{4x^2 - u^2}}\, du$$

ce qui montre que $\tilde{f}_0(\pi/2), \ldots, \tilde{f}_0(\frac{2q+1}{2}\pi)$ ... sont négatifs alors que $\tilde{f}_0(\pi) \ldots\ldots \tilde{f}_0(2q\pi)\ldots$ sont positifs. D'où l'infinité de zéros.

Agrégation 1959

Année 1959

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

ÉNONCÉ

L'objet du problème est l'étude, soit dans le champ complexe, soit dans le champ réel, des solutions de l'équation de Riccati :

(1) $$x \frac{dy}{dx} = x + y^2.$$

Dans <u>certaines</u> questions, il sera utile d'effectuer le changement de fonction inconnue défini par $y = -\frac{x}{z}\frac{dz}{dx}$ accompagné éventuellement du changement de variable $x = e^t$; on formera d'abord les équations différentielles transformées de (1) par ces deux changements : celle notée (1'), où x est la variable et z la fonction inconnue, puis celle où t est la variable et z la fonction inconnue.

I.- Dans toute cette première partie, on se place dans le champ complexe.

1°) Montrer que (1) admet une solution et une seule, notée dans toute la suite Y, holomorphe à l'origine; posant

$$Y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

montrer que l'on a, pour tout n, a_n réel et $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$

Chercher les solutions de (1') holomorphes à l'origine. Etablir la formule

(2) $$Y = \frac{\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1} n}{(n!)^2} x^n}{\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^2}{(n!)^2} x^n}$$

et montrer qu'il existe une fonction entière $f(x)$ telle que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -2\frac{Y}{x} \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

2°) Montrer que, en dehors de l'origine et du point à l'infini, les solutions de (1) n'ont d'autres singularités que des pôles simples; préciser le résidu d'une solution de (1) en un pôle x_0.

Former l'équation différentielle (3), où x est la variable et w la fonction inconnue, transformée de (1) par le changement de fonction inconnue $y = Y + \frac{1}{w\,f(x)}$,

où les fonctions Y et $f(x)$ sont regardées comme connues.

Montrer que toute solution de (1) tend vers 0 avec x et préciser la nature de la singularité que présentent, à l'origine, les solutions de (1) autres que Y.

3°) On se donne, dans le plan complexe, un ensemble ouvert ω, simplement connexe, ne contenant pas l'origine et, dans ω, une solution y de (1), autre que Y; on note y_n la solution de (1) que l'on déduit de y par prolongement analytique lorsqu'on décrit n fois dans le même sens un même lacet autour de l'origine : montrer que la suite y_n a une limite uniforme sur tout ensemble compact contenu dans ω et ne contenant aucun pôle de Y.

II.- Dans cette deuxième partie, on se place dans le champ réel au 1°) et au 2°), à nouveau dans le champ complexe au 3°).

1°) Etablir les propositions préliminaires suivantes :

a) Soit a_n une suite de nombres réels tels que $(a_{n+1} - a_n) \to 1$ quand $n \to +\infty$; alors $\frac{a_n}{n} \to 1$ quand $n \to +\infty$.

b) On considère, dans le champ réel, l'équation différentielle

$$\frac{d^2z}{dt^2} + F(t)z = 0 \qquad (4)$$

où $F(t)$ est une fonction donnée, continue et positive; montrer que, si l'on a $E(t) \geqslant m > 0$ pour $t \geqslant t_0$, alors toute solution réelle de (4) s'annule au moins une fois dans l'intervalle

$$t_0 < t \leqslant t_0 + \frac{\pi}{m}.$$

(On pourra considérer la solution z_1 de l'équation

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} + mz_1 = 0$$

qui, pour $t = t_0$, vérifie $z_1 = z$, $\frac{dz_1}{dt} = \frac{dz}{dt}$, et comparer z à z_1 en étudiant les variations de $\frac{z}{z_1}$.)

Montrer que, si u et v $(u < v)$ sont deux zéros consécutifs d'une solution réelle, non identiquement nulle de (4), et si l'on a $0 < m \leqslant F(t) \leqslant M$ pour $u \leqslant t \leqslant v$, alors

$$\frac{\pi}{M} \leqslant v - u \leqslant \frac{\pi}{m} \qquad (5)$$

2°) Dans le champ réel, préciser l'allure à l'origine des solutions de (1). Montrer que toute solution réelle de (1) a, pour $x > 0$, une infinité de pôles, notés x_n par ordre de valeurs croissantes; trouver la partie principale de x_n quand $n \to +\infty$.

3°) Revenant à l'étude des solutions de (1) dans le champ complexe, montrer que le prolongement analytique d'une solution quelconque de (1) fait apparaître une infinité de pôles.

III.- Dans toute cette troisième partie, on se place dans le champ réel, avec $x > 0$.- On tracera d'abord la parabole P_1, lieu des points où les courbes représentatives des solutions de (1) ont une tangente parallèle à l'axe des x, puis le lieu des points d'inflexion de ces courbes, qui comprend une autre parabole P_2; dans chaque région du plan limitée par ces deux lieux, on indiquera les signes de $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$

1°) Etude de Y.- Montrer que, pour toute valeur négative de x, on a

$$Y \text{ fini et négatif}, \quad \frac{dY}{dx} > 0 \quad \frac{d^2Y}{dx^2} \geqslant 0$$

Quand $x \to -\infty$, trouver la limite de $\frac{dY}{dx}$, puis la partie principale de Y.

2°) Reprenant le changement de fonction inconnue effectué au I, 2°), montrer que toute solution w de l'équation différentielle (3) a une limite finie α quand $x \to -\infty$.

Etudier les deux familles de solutions réelles de (1) correspondant, l'une aux valeurs strictement positives, l'autre aux valeurs strictement négatives, de α : dans chaque famille, on donnera, pour $x < 0$, le tableau de variation, le nombre de zéros et de pôles, le comportement quand $x \to -\infty$.

3°) Etude de la solution Y_0 de (1) correspondant à $\alpha = 0$.

Montrer que, pour toute valeur négative de x, on a

$$Y_0 \text{ fini et supérieur à } -Y, \quad \frac{dY_0}{dx} < 0, \quad \frac{d^2Y_0}{dx^2} \leqslant 0,$$

et que

$$\frac{Y_0}{Y} \to -1 \qquad \text{quand } x \to -\infty.$$

4°) Montrer que, quand $x \to -\infty$, toutes les courbes représentatives des solutions réelles de (1) sont asymptotes à la parabole P_2. [On pourra associer à chaque solution réelle y de (1), la fonction $\eta = y - \varepsilon \quad -x$, où $\varepsilon = \pm 1$ a le signe de y quand $x \to -\infty$, puis montrer que cette fonction η est la solution particulière d'une équation différentielle linéaire :

$$(6) \qquad 2\,\varepsilon \quad -x\,\frac{d\eta}{dx} + 4\,g(x)\eta = 1,$$

où $g(x) \to 1$ quand $x \to -\infty$, enfin étudier le comportement, quand $x \to -\infty$, les solutions de (6).]

CORRIGÉ

I. Les équations transformées sont

$$x\,\frac{d^2Z}{dx^2} + \frac{dZ}{dx} + Z = 0 \qquad (1')$$

et

$$\frac{d^2Z}{dt^2} + e^t\,Z = 0.$$

▶ 1) On cherche une solution <u>formelle</u> $Y = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et on dérive formellement: $Y' = \sum_1^{\infty} n\,a_n\,x^{n-1}$. En identifiant les coefficients des différentes puissances de x dans (1), on a

$$a_0 = 0\ ; \quad a_1 = 1;\ \ldots\ldots \quad n\,a_n = \sum_1^{n-1} a_p\,a_{n-p}.$$

Si la solution cherchée existe, les a_i <u>doivent</u> vérifier ces formules, ce qui prouve l'unicité.

Par récurrence les $a_i \in \mathbb{R}^+$. De plus si $a_i \leqslant \frac{1}{i}$ pour $i < n$, on a

$$n\,a_n \leqslant \sum \frac{1}{p}\,\frac{1}{n-p} \leqslant 1 \qquad \text{car } p(n-p) \geqslant n-1 \text{ si } 1 \leqslant p \leqslant n-1; \text{ d'où}$$

$a_n \leqslant \frac{1}{n}$ <u>$\forall$ n</u>.

La série $\sum a_n x^n$ est majorée par $\sum \frac{|x|^n}{n}$ qui converge si $|x| < 1$.

D'où l'existence de Y, analytique dans $|x| < 1$ et les calculs ci-dessus sont justifiés. (Majorante de Cauchy)

Le même procédé pour (1)' conduit aux séries entières $\lambda \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\,x^n$ dont le rayon de convergence est infini et qui représentent dans C les solutions de (1)' holomorphes en 0.

$$\text{Si } Z(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\,x^n\ , \quad \frac{dZ}{dx} = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n\,n x^{n-1}}{(n!)^2}\ .$$

Par le changement de variable qui conduit à (1)' $-\frac{x}{Z}\,\frac{dZ}{dx}$ est solution de (1), est holomorphe en 0 ($Z(0) \neq 0$) donc elle coïncide avec Y ce qui prouve (2).

$$\frac{f'}{f} = 2\,\frac{Y}{x} \quad \text{donne} \quad \frac{f'}{f} = 2\,\frac{Z'}{Z} \quad \text{et } f = Z^2 \text{ compte tenu}$$

de $f(0) = 1$ et Z^2 est entière comme Z.

▶ 2) Les solutions de (1') $Z'' + Z' + \frac{Z}{x} = 0$ n'ont pas d'autres singularités que celles de ses coefficients : elles sont donc holomorphes **,en** tout point point à distance finie autre que 0. (Dieudonné. Calcul infinitésimal).

· Comme $y = -\frac{x}{Z}\,\frac{dZ}{dx}$, les seules singularités de y proviennent des zéros de Z; elles sont donc les pôles simples. (si $Z(X_0) = 0 = Z'(X_0)$, avec $X_0 \neq 0$, on en déduit via (1)' que $Z''(X_0)$ puis en dérivant que $Z'''(X_0) = 0$ ... et $Z \equiv 0$).

Le résidu de y est donné par $-\dfrac{X_0\left(\frac{dZ}{dX}\right)(x_0)}{\left(\frac{dZ}{dX}\right)_{x_0}} = -x_0.$

On a facilement $\dfrac{dw}{dx} = -\dfrac{1}{x f(x)}$ (3) .

Comme $f(o) = 1$ et $\frac{1}{f}$ est holomorphe en 0,

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{x} + \varphi(x)$$

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Concours de 1959.

5322. — N.-B. — L'ordre dans lequel peuvent être traitées les parties II et III est indifférent.

PREMIÈRE PARTIE. — *Le plan est rapporté à un repère orthonormé* Ox, Oy. *Soit* (γ) *le cercle imaginaire d'équation* $x^2 + y^2 + b^2 = 0$, *où* b *représente une longueur positive donnée. On désigne par* (E) *toute ellipse qui admet le point* O, *origine des coordonnées, pour foyer et dont le centre* ω *admet pour polaire, par rapport au cercle* (γ), *la directrice, associée à* O, *de cette ellipse* (E).

1° *Que peut-on dire de la longueur du petit axe de* (E) *ainsi que de la puissance du point* O, *soit par rapport au grand cercle principal, soit par rapport au cercle directeur relatif au second foyer réel de cette ellipse?*

Caractériser les transformées des ellipses (E) *par polaires réciproques par rapport à* (γ).

2° *Montrer que, si* (E) *varie de façon à rester tangente à une droite fixe* (D), *ne passant pas par* O, (E) *reste aussi tangente à une autre droite fixe* (D′) *et que la droite qui joint les points de contact de cette ellipse avec* (D) *et* (D′) *passe par un point fixe (qui peut être à l'infini).*

Dans la même hypothèse [(E) *reste tangente à* (D)], *déterminer les enveloppes des directrices réelles de* (E).

3° *Former l'équation cartésienne de* (E) *en fonction des coordonnées* λ *et* μ *de son centre* ω.

On suppose que l'ellipse (E) *varie sans cesser de passer par le point fixe* H *de coordonnées* h, $0 (h \neq 0)$. *Quel est le lieu de son centre?*

Dans l'hypothèse $h = b$, *construire le lieu des sommets du grand axe de* (E).

4° *Déterminer et construire l'enveloppe des ellipses* (E) *qui passent par le point fixe* H.

5° *Les ellipses* (E) *dont le centre décrit une courbe* (L) *admettent pour enveloppe, outre les droites isotropes du point* O, *une certaine courbe* (ℰ). (E) *touche* (ℰ) *en deux points* M_1 *et* M_2 *généralement distincts. Déterminer* (L) *de façon que la droite* M_1M_2 *passe par un point fixe de* Ox *à l'infini ou à distance finie.*

On choisit (L), *distincte de* Oy, *de façon que la droite* M_1M_2 *reste parallèle à* Ox; *vérifier qu'alors* (ℰ) *se compose de deux coniques.*

DEUXIÈME PARTIE. — *L'espace est rapporté à un repère orthonormé* Ox, Oy, Oz.

A tout point ω *de coordonnées* (λ, μ, 0) *on associe le cercle* (Ω) *défini par les équations*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda x - 2\mu y - b^2 = 0, \quad \mu x - \lambda y + bz = 0.$$

1° *Vérifier que la projection orthogonale de* (Ω) *sur le plan* xOy *est l'ellipse* (E), *de centre* ω, *définie dans la première partie. Indiquer une construction géométrique simple de la perpendiculaire en* O *au plan du cercle* (Ω), *connaissant le centre de ce cercle.*

2° *Vérifier qu'un plan variable, passant par* Oz, *coupe un cercle* (Ω) *donné, sous un angle qui ne dépend pas de la position de ce plan.*

3° *Lorsque le centre* ω *du cercle* (Ω) *décrit une courbe* (L) *du plan* xOy, *ce cercle engendre une surface* (S). *Déterminer un système de paramètres directeurs de la normale à cette surface en un point quelconque du cercle* (Ω). *Vérifier que, si deux courbes* (L_1) *et* (L_2) *du plan* xOy *sont tangentes en un point, les surfaces* (S) *correspondantes, soient* (S_1) *et* (S_2), *se raccordent le long du cercle* (Ω) *qui admet ce point pour centre.*

M *désignant un point d'une surface* (S), *associée à une courbe* (L), *on appelle* V *l'angle aigu du plan tangent en* M *à* (S) *et du plan* MOz. *Montrer que* V *demeure constant lorsque* M *décrit un cercle* (Ω) *de* (S). *Exprimer* cos V *en fonction des coordonnées du centre* ω *de ce cercle et de la pente de la tangente en* ω *à la courbe* (L).

4° *Déterminer la courbe* (L) *de façon que l'angle* $V \left(0 < V < \frac{\pi}{2}\right)$ *soit indépendant de la position du point* M *sur la surface* (S) *correspondante.*

[*Il est recommandé de considérer* (L) *comme enveloppe d'une droite d'équations*

$$z = 0, \quad x \cos\theta + y \sin\theta - p(\theta) = 0.]$$

Étudier le contour apparent réel dans l'espace, relativement à la direction Oz, *d'une telle surface. Vérifier que ce contour apparent comprend les courbes situées dans des plans perpendiculaires à* Oz.

TROISIÈME PARTIE. — *Dans tout ce qui suit on considère les cercles* (Ω) *qui rencontrent la droite* Δ *d'équations* $x = b, y = 0$ *et la surface* (Σ) *qu'ils engendrent.*

1° *Étudier l'enveloppe des plans de ces cercles et former l'équation cartésienne de la surface* (Σ). *Étudier les sections de cette surface par les plans de coordonnées.*

2° *Montrer que la section de* (Σ) *par un plan quelconque passant par* Oz *et distinct du plan* xOz *est constituée de* Oz *et de deux cercles tangents à* Oz.

3° *Montrer que* (Σ) *peut être considérée comme lieu d'un cercle* (Γ) *tangent à* Oz *dont le centre décrit une parabole.*

Étudier le contour apparent de (Σ) *relativement à la direction* Oz.

4° *Évaluer le volume engendré par l'intérieur du cercle* (Γ) *lorsque celui-ci varie sur* (Σ) *de façon à occuper toutes les positions pour lesquelles son centre admet une abscisse négative ou nulle.*

I

1. Étude de (E). — Le centre ω étant donné, la directrice, Δ, associée au foyer O, est perpendiculaire à $O\omega$ en H défini par $\overline{OH}.\overline{O\omega} = -b^2$; ON étant perpendiculaire à $O\omega$ et étant égal à ON, le triangle ωNH (*fig.* 1) est rectangle en N. Le demi grand axe de l'ellipse est a tel que $a^2 = \overline{\omega O}.\overline{\omega H} = \overline{\omega N^2}$ et $\overline{ON^2} = a^2 - \overline{O\omega^2} = b^2$ est le carré du demi petit axe b de (E).

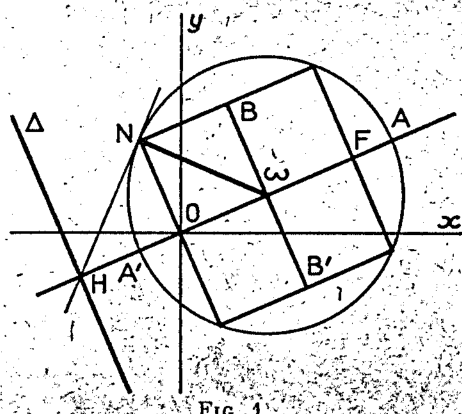


Fig. 1.

(E) est ainsi définie par son centre ω, le foyer O, le demi petit axe $b = \text{ON}$ et le cercle principal (C) (centre ω, rayon $a = \text{ON}$); Δ est la polaire de O par rapport au cercle (C) et la polaire de ω par rapport au cercle (γ). Les sommets de (E) sont A, A′ et B, B′.

Puissance de O **par rapport à** (C) : $p = -\overline{ON^2} = -b^2$.

Puissance de O **par rapport au cercle** (F) **de centre** F **(deuxième foyer) de rayon** $2a$:

$$p' = 4c^2 - 4a^2 = -4b^2.$$

Transformée de (E) **par polaires réciproques par rapport à** (γ). Conique passant par les pôles des tangentes isotropes issues de O à (E), donc passant par les points cycliques; c'est un cercle (E′) dont le centre est le pôle ω de Δ par rapport à (γ). La tangente en A à (E) a pour pôle A′; (E′) passe par A et A′, (E′) est donc le cercle (C) lui-même.

L'ensemble des cercles (C) est celui des cercles orthogonaux à (γ).

2. Ellipses (E) **tangentes à une droite fixe** (D) (fig. 2). — Ce sont les polaires réciproques des cercles (C) qui passent par le point D_1 pôle de (D) par rapport à γ [$\overline{OD'_1}.\overline{OD_1} = -b^2$, D'_1 projection de O sur (D)]. (C) orthogonal à (γ) et passant par D_1 passe aussi par D'_1 sur OD_1 tel que $\overline{OD_1}.\overline{OD'_1} = -b^2$. (E) est donc tangente à (D′) polaire de D'_1, c'est-à-dire à la parallèle à (D) passant par D_1.

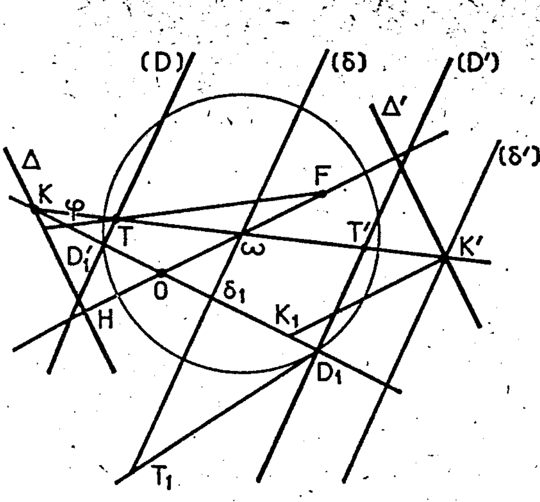


Fig. 2.

La droite joignant les points de contact T, T′ de (E) avec (D), (D′) est la polaire par rapport à (γ) du point d'intersection T_1 des tangentes à (C) en D_1 et D'_1; ce point T_1 décrit la médiatrice (δ) de $D_1D'_1$, sa polaire par rapport à (γ) passe par le point fixe K de $D_1D'_1$, pôle de (δ) par rapport à (γ); δ est conjuguée de la droite à l'infini par rapport à (D) (D′), donc K est conjugué de O par rapport à D_1, D'_1

$$\left(\frac{1}{\overline{OD_1}} + \frac{1}{\overline{OD'_1}} = \frac{2}{\overline{OK}}\right).$$

K est à l'infini si O est le milieu de $D_1D'_1$, c'est-à-dire si (D) est à la distance b de O.

Enveloppe de la directrice Δ. — Δ polaire par rapport à (γ) de ω, qui décrit (δ), a pour enveloppe le pôle de (δ) par rapport à (γ), c'est-à-dire le point K.

Enveloppe de la directrice Δ'. — Soient K′ et K_1 les symétriques de K par rapport à ω et O; K_1 est fixe et K′ décrit l'homothétique (δ') de (δ) dans l'homothétie de centre K, de rapport 2; Δ' est la perpendiculaire à $K'K_1$ en K′, l'enveloppe de Δ' est la parabole de foyer K_1, de tangente au sommet δ', si K_1 n'est pas sur (δ').

Si K_1 est sur (δ'), (δ) passe par O, qui est alors milieu de $D_1D'_1$. $D_1D'_1$ est le petit axe invariable de (E). Δ et Δ' ont la direction invariable perpendiculaire à celle de (D).

3. Équation cartésienne de (E) de centre $\omega(\lambda, \mu)$.

Équation de Δ : $\lambda x + \mu y + b^2 = 0$.

Équation de (E) :

$$x^2 + y^2 - \frac{e^2}{\lambda^2+\mu^2}(\lambda x + \mu y + b^2)^2 = 0, \qquad e^2 = \frac{\lambda^2+\mu^2}{\lambda^2+\mu^2+b^2}; \qquad (\lambda^2+\mu^2+b^2)(x^2+y^2) - (\lambda x + \mu y + b^2)^2 = 0.$$

(E) passe par H $(h, 0)$ si $h^2\mu^2 - 2b^2h\lambda + b^2(h^2 - b^2) = 0$.

ω décrit la parabole (Π) $y^2 - \dfrac{2b^2}{h}\left(x - \dfrac{h}{2} + \dfrac{b^2}{2h}\right) = 0$ (axe Ox, sommet $\left(\dfrac{h}{2} - \dfrac{b^2}{2h}, 0\right)$, foyer $\left(\dfrac{h}{2}, 0\right)$.

Cas $h = b$, ω décrit la parabole (Π_1) $y^2 = 2bx$, d'équation polaire $r = 2b\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$, les sommets du grand axe de (E) ont pour coordonnées polaires θ, ρ; $\rho = r \pm r_1$, où

$$r_1^2 = r^2 + b^2 = b^2\left(\frac{4\cos^2\theta}{\sin^4\theta} + 1\right) = b^2\frac{(1+\cos^2\theta)^2}{\sin^4\theta}, \qquad r_1 = b\frac{1+\cos^2\theta}{\sin^2\theta},$$

$$\rho = b\left(\frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta} \pm \frac{1+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right),$$

$$\rho_1 = -b\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} = -b\,\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}, \qquad \rho_2 = b\,\mathrm{cotg}^2\frac{\theta}{2}.$$

Mais $\rho_1(\theta + \pi) = -\rho_2(\theta)$; le lieu complet (α) est donc défini par $\rho = -b\,\mathrm{tg}^2\dfrac{\theta}{2}$; en coordonnées cartésiennes

$$(x^2+y^2-bx)^2 - (x^2+y^2)(x+b)^2 = 0, \qquad (x^2+y^2)(y^2 - 4bx) - b^2y^2 = 0;$$

on a tracé la courbe (α) figure 3.

Fig. 3.

4. Enveloppe des ellipses (E) passant par H.

$$h^2(\lambda^2+\mu^2+b^2) = 2b^2h\lambda - b^2h^2 + b^4 + h^2\lambda^2 + b^2h^2 = (b^2 + h\lambda)^2.$$

L'équation de (E) s'écrit

$$(b^2+h\lambda)^2(x^2+y^2) - h^2(\lambda x + \mu y + b^2)^2 = 0,$$

d'où l'équation polaire

$$b^2 + h\lambda = h\lambda\cos\theta + h\mu\sin\theta + \frac{b^2}{r}h, \quad \frac{b^2}{r} = -\lambda\cos\theta - \mu\sin\theta + \frac{b^2}{h} + \lambda, \quad \frac{b^2}{r} = \frac{h^2\mu^2 + b^2h^2 - b^4}{2b^2h}(1-\cos\theta) - \mu\sin\theta + \frac{b^2}{h}.$$

Les points caractéristiques sont définies par $\dfrac{h\mu}{b^2}(1-\cos\theta) - \sin\theta = 0$ et le lieu de ces points est la courbe d'équation polaire

$$\frac{b^2}{r} = \frac{b^2}{2h}\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} + \left(\frac{h}{2} - \frac{b^2}{2h}\right)(1-\cos\theta) - \frac{b^2}{h}\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} + \frac{b^2}{h} = \frac{h}{2}(1-\cos\theta), \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{r} = \frac{h}{2b^2}(1-\cos\theta).$$

C'est la parabole d'axe Ox, de foyer O, de sommet $\left(-\dfrac{b^2}{h}, 0\right)$.

On voyait immédiatement que l'ellipse E est tangente aux isotropes de O, comme elle passe par H, on a ainsi trois points caractéristiques le point H et les points de contact avec les isotropes de O, points sur la directrice $\lambda x + \mu y + b^2 = 0$; il reste un point caractéristique variable qui décrit la parabole indiquée.

Solution géométrique. — La polaire réciproque de (E), passant par H est un cercle (C) orthogonal à (γ) et tangent à la droite $x = -\dfrac{b^2}{h}$; ce cercle est tangent au cercle inverse de la droite $x = -\dfrac{b^2}{h}$ dans l'inversion $(\mathrm{O}, -b^2)$, cercle de diamètre OH; l'enveloppe de (C) est formée des points cycliques, de la droite $x = -\dfrac{b^2}{h}$ et du cercle de diamètre (OH); (E) est tangente aux isotropes de O, passe par H, pôle de $x = -\dfrac{b^2}{h}$ par rapport à (γ) et a pour enveloppe proprement dite la polaire réciproque du cercle de diamètre OH par rapport à (γ), c'est-à-dire la parabole de foyer O et de tangente au sommet la droite $x = -\dfrac{b^2}{h}$.

5. λ, μ dépendant d'un paramètre, les points caractéristiques de (E) sont définis par

$$(\lambda^2 + \mu^2 + b^2)(x^2 + y^2) - D^2 = 0, \qquad D = \lambda x + \mu y + b^2,$$
$$(\lambda\, d\lambda + \mu\, d\mu)(x^2 + y^2) - D(x\, d\lambda + y\, d\mu) = 0,$$

d'où

$$D(\lambda^2 + \mu^2 + b^2)(x\, d\lambda + y\, d\mu) - (\lambda\, d\lambda + \mu\, d\mu)\, D = 0.$$

On obtient : 1° les points d'intersection de (E) et de la directrice $D = 0$, c'est-à-dire les points de contact de (E) avec les isotropes de O ; 2° les points M_1, M_2 intersection de (E) et de la droite

$$D_1 = (\lambda^2 + \mu^2 + b^2)(x\, d\lambda + y\, d\mu) - (\lambda\, d\lambda + \mu\, d\mu)(\lambda x + \mu y + b^2) = 0,$$

qui passe par $\omega(\lambda, \mu)$.

a) Cette droite est parallèle à Ox, si $(\mu^2 + b^2)\, d\lambda - \lambda\mu\, d\mu = 0$, c'est-à-dire :

1° si $\lambda = 0$: ω décrit Oy, (E) a pour enveloppe réelle les droites $x = \pm b$;

2° si $\dfrac{2\, d\lambda}{\lambda} = \dfrac{2\mu\, d\mu}{\mu^2 + b^2}$, $\mu^2 + b^2 = k^2\lambda^2$: ω décrit une hyperbole d'axes Ox, Oy qui coupe Oy aux points $y = \pm bi$.

Puisque la droite D_1 passe par ω, elle devient $y = \mu$ si elle est parallèle à Ox ; les points M_1, M_2 sont définis par

$$y = \mu, \qquad k^2(x - \lambda)^2 - (1 + k^2)\, b^2 = 0$$

et, en posant $k = \operatorname{tg} \alpha$,

$$x = \lambda \pm \frac{b}{\sin \alpha}, \qquad y = \mu.$$

Le lieu de M_1, M_2 est formé des deux coniques représentées par l'équation

$$\operatorname{tg}^2 \alpha \left(x \pm \frac{b}{\sin \alpha}\right)^2 - y^2 - b^2 = 0$$

dont les centres sont $\left(-\dfrac{b}{\sin \alpha}, 0\right)$ et $\left(\dfrac{b}{\sin \alpha}, 0\right)$, les demi-distances focales $\dfrac{b}{|\sin \alpha|}$ et les foyers O et $\left(-\dfrac{2b}{\sin \alpha}, 0\right)$ pour la première, O et $\left(\dfrac{2b}{\sin \alpha}, 0\right)$ pour l'autre.

b) M_1M_2 passe par le point fixe $H(h, 0)$ si

$$(\lambda^2 + \mu^2 + b^2)\, h\, d\lambda - (\lambda\, d\lambda + \mu\, d\mu)(h\lambda + b^2) = 0,$$

équation vérifiée par $\lambda = -\dfrac{b^2}{h}$ $(h \neq 0)$ et par les fonctions $\mu(\lambda)$ ou $\lambda(\mu)$ définies par

$$\frac{2(\lambda\, d\lambda + \mu\, d\mu)}{\lambda^2 + \mu^2 + b^2} = \frac{2\, d\lambda}{\lambda + \dfrac{b^2}{h}},$$

$K(\lambda^2 + \mu^2 + b^2) - \left(\lambda + \dfrac{b^2}{h}\right)^2 = 0$, qui redonne $\lambda = -\dfrac{b^2}{h}$ pour $k = 0$.

Les courbes (L) forment le faisceau des coniques bitangentes au cercle (γ) aux points d'intersection avec la droite $x = -\dfrac{b^2}{h}$. Pour $k = 1$, on obtient la parabole (Π) $y^2 - 2\dfrac{b^2}{h}x + b^2 - \dfrac{b^4}{h^2} = 0$; en ce cas les ellipses (E) passent par le point H et ont pour enveloppe la parabole d'axe Ox de foyer O, de sommet $\left(-\dfrac{b^2}{h}, 0\right)$.

Pour $\lambda = -\dfrac{b^2}{h}$, le cercle (C) passe par les deux points fixes $\left(-\dfrac{b^2}{h} + u, 0\right)$, $\left(-\dfrac{b^2}{h} - u, 0\right)$ avec $u^2 = \dfrac{b^4}{h^2} + b^2$; (E) est tangente aux droites $x = \dfrac{-b^2h}{-b^2 + hu}$ et $x = \dfrac{+b^2h}{b^2 + hu}$, qui constituent avec les droites isotropes de O, l'enveloppe de (E).

Enveloppe de (E) **quand** M_1M_2 **passe par** $H(h, 0)$. — On peut chercher d'abord l'enveloppe du **cercle principal** (C). (C) est orthogonal à (γ) et son centre décrit (L), bitangente à (γ) aux points d'abscisse $x = -\dfrac{b^2}{h}$, et dont l'équation tangentielle est

$$m^2\left[b^2(u^2 + v^2) + w^2\right] - (hu + w)^2 = 0.$$

Les points caractéristiques de (C) sont des points M, M′ alignés avec O, de coordonnées polaires

(θ, r) $\left(\theta, \frac{-b^2}{r}\right)$; la médiatrice de MM′ a pour équation $x \cos\theta + y \sin\theta - \frac{r^2-b^2}{2r} = 0$; elle doit être tangente à (L), on a donc

$$m^2\left(b^2 + \frac{(r^2-b^2)^2}{4r^2}\right) - \left(h\cos\theta - \frac{r^2-b^2}{2r}\right)^2 = 0,$$

qui est, en polaires, l'équation de l'enveloppe de (C); cette équation s'écrit

$$m^2(r^2+b^2)^2 - (r^2 - b^2 - 2rh\cos\theta)^2 = 0$$
$$\pm m(r^2+b^2) + r^2 - 2rh\cos\theta - b^2 = 0$$
$$(1+\varepsilon m)r^2 - 2rh\cos\theta + (\varepsilon m - 1)b^2 = 0$$

et devient en coordonnées cartésiennes, $(1+\varepsilon m)(x^2+y^2) - 2hx + (\varepsilon m - 1)b^2 = 0$,

$$x^2+y^2-2hx-b^2+\varepsilon m(x^2+y^2+b^2) = 0, \qquad \text{ou} \qquad (1+\varepsilon m)(x^2+y^2+b^2) - 2h\left(x+\frac{b^2}{h}\right) = 0.$$

L'enveloppe de (C) est décomposée en deux cercles du faisceau défini par (γ) et la droite $x = -\frac{b^2}{h}$.

L'enveloppe de (E) est donc décomposée en les deux coniques polaires réciproques des cercles précédents par rapport à (γ), coniques de foyer O, qui sont tangentes aux deux tangentes menées de H au cercle (γ).

D'une façon générale, l'enveloppe d'un cercle, orthogonal à un cercle fixe et dont le centre décrit une conique, est une quartique bicirculaire; si le cercle fixe est bitangent à la conique, la quartique admet les points de contact comme points doubles, elle a ainsi quatre points doubles et, par conséquent, se décompose en deux cercles passant par les points de contact.

II

1. Cercle Ω :

$$x^2+y^2+z^2-2\lambda x-2\mu y-b^2=0,\ \mu x-\lambda y+bz=0\ (\mathrm{P}).$$

Projection sur xOy :

$$x^2+y^2+\left(\frac{\mu z-\lambda y}{b}\right)^2-2\lambda x-2\mu y-b^2=0, \qquad \text{ou} \qquad (\lambda^2+\mu^2+b^2)(x^2+y^2)-(\lambda x+\mu y+b^2)^2=0;$$

cette projection est l'ellipse (E).

La normale en O au plan (P) porte le vecteur **ON**, de composantes $(\mu, -\lambda, b)$; N est le point du plan $z = b$ déduit de la projection ω_1 de ω sur ce plan $z = b$ par rotation de $-\frac{\pi}{2}$ autour de Oz.

Le cercle Ω est déduit par rotation autour de Oz du cercle Ω_1, $x^2+y^2+z^2-2\rho x-b^2=0, -\rho y+bz=0$, où $\rho=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$.

2. Il suffit de démontrer que tout plan passant par Oz coupe Ω_1 sous un angle constant.

En un point $M(x, y, z)$ de Ω_1, les paramètres directeurs de la tangente au cercle Ω_1 sont

$$by+\rho z, \qquad b(\rho-x), \qquad \rho(\rho-x).$$

Ceux de la normale au plan MOz sont $y, -x, 0$.

L'angle V_1 du plan et du cercle est donné par

$$\sin^2 V_1 = \frac{[(by+\rho z)y-b(\rho-x)x]^2}{(x^2+y^2)[(by+\rho z)^2+(b^2+\rho^2)(x-\rho)^2]} = \frac{b^2(\rho x+b^2)^2}{(b^2+\rho^2)^2(x^2+y^2)} = \frac{b^2}{b^2+\rho^2}.$$

V_1 est donc constant, donné pour λ, μ quelconques par

$$\sin^2 V_1 = \frac{b^2}{b^2+\lambda^2+\mu^2}, \qquad \operatorname{cotg}^2 V_1 = \frac{\lambda^2+\mu^2}{b^2}.$$

3. λ et μ étant fonctions d'un paramètre t, les cercles (Ω) engendrent une surface définie par x, y, z fonctions de t et d'un autre paramètre (z par exemple) vérifiant les relations $x^2+y^2+z^2-2\lambda x-2y\mu-b^2=0$, $\mu x-\lambda y+bz=0$; cependant que le point $x=\lambda(t), y=\mu(t), z=0$ décrit une courbe (L) du plan xOy.

On a les relations

$$(x-\lambda)\,dx+(y-\mu)\,dy+z\,dz-(x\,d\lambda+y\,d\mu)=0 \qquad \text{et} \qquad \mu\,dx-\lambda\,dy+b\,dz+x\,d\mu-y\,d\lambda=0;$$

par conséquent

$$(x\,d\mu-y\,d\lambda)\,[(x-\lambda)\,dx+(y-\mu)\,dy+z\,dz]+(x\,d\lambda+y\,d\mu)\,[\mu\,dx-\lambda\,dy+b\,dz]=0.$$

La normale à (S) en $M(x, y, z)$ a pour vecteur directeur $N_1(X_1, Y, Z_1)$:

$$X_1 = (x-\lambda)(x\,d\mu - y\,d\lambda) + \mu(x\,d\lambda + y\,d\mu),\quad Y_1 = (y-\mu)(x\,d\mu - y\,d\lambda) - \lambda(x\,d\lambda + y\,d\mu),$$
$$Z_1 = z(x\,d\mu - y\,d\lambda) + b(x\,d\lambda + y\,d\mu).$$

Pour deux courbes (L_1), (L_2) tangentes au point (λ, μ), $\frac{d\mu}{d\lambda}$ a la même valeur et, en tout point du cercle (Ω) correspondant, les deux vecteurs N_1 sont colinéaires, les surfaces (S_1), (S_2) sont tangentes.

Angle V de N_1, normale à (S) et de $n(y, -x, 0)$, normale à MOz :

$$\cos V = \frac{|X_1 y - Y_1 x|}{|N_1||n|} = \frac{|\lambda\,d\lambda + \mu\,d\mu|}{\sqrt{(\lambda^2+\mu^2+b^2)(d\lambda^2+d\mu^2)}},$$

ou, en posant

$$\rho = \sqrt{\lambda^2+\mu^2},\qquad R = \sqrt{\lambda^2+\mu^2+b^2}\ [\text{rayon de } (\Omega)],$$

s abscisse curviligne de ω sur (L) :

$$\cos V = \sqrt{b^2+\rho^2}\,ds = \left|\frac{dR}{ds}\right|$$

et, si l'on définit (L) comme enveloppe de la droite $x\cos\theta + y\sin\theta - p(\theta) = 0$:

$$\lambda^2+\mu^2 = p^2+p'^2,\qquad ds^2 = (p+p'')^2 d\theta^2,\ \rho\,d\rho = p'(p+p'')\,d\theta,\qquad \cos V = \frac{|p'|}{\sqrt{b^2+p^2+p'^2}}\ \left(p' = \frac{dp}{d\theta}\right).$$

V est bien constant le long de tout cercle (Ω) de (S).

4. Pour que V soit constant en tous les points M de (S), il faut et il suffit que

$$(b^2+p^2+p'^2)\cos^2 V - p'^2 = 0,\qquad \left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2 \sin^2 V = (p^2+b^2)\cos^2 V_0,$$

où V est donné. Posons $p = \operatorname{sh} u$, l'équation différentielle devient $\operatorname{ch}^2 u \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \operatorname{ch}^2 u \operatorname{cotg}^2 V$ ou $du = \varepsilon\,d\theta \operatorname{cotg} V$ $\varepsilon = \pm 1$, d'où, $u = \varepsilon\theta \operatorname{cotg} V + u_0 = \varepsilon(\theta-\theta_0)\operatorname{cotg} V$, $p = b\varepsilon \operatorname{sh} k(\theta-\theta_0)$ avec $k = \operatorname{cotg} V$ mais il est évident que la courbe (L) pour $\varepsilon = -1$ est symétrique par rapport à O de celle obtenue pour $\varepsilon = 1$; le cercle $\Omega(-\lambda, -\mu)$ est symétrique par rapport à Oz du cercle $\Omega(\lambda, \mu)$; la surface définie par $p = -b \operatorname{sh} k(\theta-\theta_0)$ est donc symétrique par rapport à Oz de la surface définie par $p = b\operatorname{sh} k(\theta-\theta_0)$; nous considérons donc uniquement (S) définie par $p = b \operatorname{sh} k(\theta-\theta_0)$.

Contour apparent horizontal de (S) (Oz vertical).

Le contour apparent en projection sur xOy est l'enveloppe de (E) lorsque (L) est l'enveloppe de $x\cos\theta + y\sin\theta - p(\theta) = 0$. Or, l'enveloppe de (C), cercle principal de (E) est la courbe d'équation polaire $r - \frac{b^2}{r} = 2p(\theta)$ et l'enveloppe de (E) est l'enveloppe de la droite $x\cos\theta + y\sin\theta - bq(\theta) = 0$ avec $q - \frac{1}{q} = \frac{2p(\theta)}{b}$.

Pour $p(\theta) = b\operatorname{sh} u$, $u = (\theta-\theta_0)\operatorname{cotg} V$, on a

$$q^2 - 2q\operatorname{sh} u - 1 = 0,\qquad q = \operatorname{sh} u \pm \operatorname{ch} u,\qquad q_1 = e^u,\qquad q_2 = -e^{-u}.$$

L'enveloppe de (E) est formée des droites isotropes de O et des courbes (ε_1) et (ε_2) enveloppes respectives de

$$x\cos\theta + y\sin\theta - be^u = 0,$$
$$x\cos\theta + y\sin\theta + be^{-u} = 0.$$

(ε_1) est décrite par le point $x = be^u(\cos\theta - k\sin\theta)$, $y = be^u(\sin\theta + k\cos\theta)$, ou

$$x = \frac{be^u}{\sin V}\cos\theta\sin(V-\theta),\qquad y = \frac{be^u}{\sin V}\cos(V-\theta),$$

point de coordonnées polaires

$$\theta_1 = \theta + \frac{\pi}{2} - V,\qquad r_1 = \frac{be^u}{\sin V} = \frac{be^{k(\theta-\theta_0)}}{\sin V};$$

(ε_1) a pour équation polaire

$$r_1 = \frac{b}{\sin V} e^{k\left(\theta_1 - \frac{\pi}{2} + V - \theta_0\right)},$$

(ε_2) est définie par

$$x = be^{-u}(-\cos\theta - k\sin\theta),\qquad y = be^{-u}(-\sin\theta + k\cos\theta),$$
$$x = -\frac{be^{-u}}{\sin V}\sin(\theta+V),\qquad y = \frac{-be^{-u}}{\sin V}\cos(\theta+V),$$

(ε_2) a pour équation polaire $$r_2 = \frac{b}{\sin V} e^{k\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2} + V + \theta_0\right)}.$$

Géométriquement, un plan tangent vertical à (S) en M fait avec MOz un angle V constant, sa trace M'T' est tangente à l'ellipse (E) en M' et fait un angle égal à V avec OM; le contour apparent horizontal de (S) en projection est donc une courbe décrite par M' et telle que la tangente en M' fasse avec OM' un angle constant V; c'est donc une spirale logarithmique de pôle O.

La cote z du point M de (S) peut s'écrire $z = \frac{1}{b}\overline{\mathbf{O\omega} \wedge \mathbf{OM}'}$, et, en rapportant les vecteurs aux axes OX, OY définis par

$$(\mathrm{O}x,\ \mathrm{OX}) = \theta, \qquad (\mathrm{OX},\ \mathrm{OY}) = +\frac{\pi}{2},$$

$$z = \frac{1}{b}(pq' - qp') = b(k \operatorname{sh} u\, e^u - ke^u \operatorname{ch} u) = -kb, \qquad \text{pour} \qquad q = e^u;$$

$$z = b\,(k \operatorname{sh} u e^{-u} + k \operatorname{ch} u e^{-u}) = kb \qquad \text{pour} \qquad q = e^{-u}.$$

Le contour apparent réel de (S) est donc constitué par des spirales logarithmiques (ε_1), (ε_2) respectivement dans les plans $z = -kb$ et $z = kb$.

III

Cercles (Ω) **rencontrant** $\Delta(x = b, y = 0)$, perpendiculaire à $x\mathrm{O}y$ en H $(\overline{\mathrm{OH}} = b)$. Le point U du cercle sur Δ a pour cote z vérifiant $z + \mu = 0$, $z^2 - 2\lambda b = 0$; $z = -\mu$. λ et μ sont liés par $\mu^2 = 2\lambda b$, $\lambda = \frac{\mu^2}{2b}$.

1. Étude des cercles (Ω) (fig. 4). — Le lieu de Ω est la parabole (π_1) dans $x\mathrm{O}y$, d'axe Ox, de sommet O, de foyer F $\left(\overline{\mathrm{OF}} = \frac{\overline{\mathrm{OH}}}{2}\right)$. Le rayon ρ de (Ω) a pour carré $\rho^2 = \overline{\mathrm{O}\Omega}^2 + b^2 = \lambda^2 + 2\lambda b + b^2 = (b + \lambda)^2 = \overline{\Omega\Omega'}^2$, Ω' étant la projection de Ω sur Δ', droite conjuguée de Δ par rapport à la sphère (s)

$$x^2 + y^2 + z^2 + b^2 = 0, \qquad \rho = \Omega\Omega' = \Omega\mathrm{U}.$$

En particulier, $\rho = 0$ si $\lambda = -b$, $\mu^2 = -2b^2$, $\mu = \varepsilon bi\sqrt{2}$, (Ω) devient la section du cône isotrope

$$(x + b)^2 + (y - \varepsilon bi\sqrt{2})^2 + z^2 = 0$$

par le plan isotrope

$$\varepsilon i\sqrt{2}x + y + z = 0, \quad \text{ou} \quad \varepsilon i\sqrt{2}(x + b) + (y - \varepsilon bi\sqrt{2}) + z = 0;$$

cette section est la droite *double* isotrope

$$\frac{x + b}{\varepsilon i\sqrt{2}} = y - \varepsilon bi\sqrt{2} = z,$$

ou

$$x - \varepsilon i\sqrt{2}y + b = 0, \qquad x - \varepsilon i\sqrt{2}z + b = 0.$$

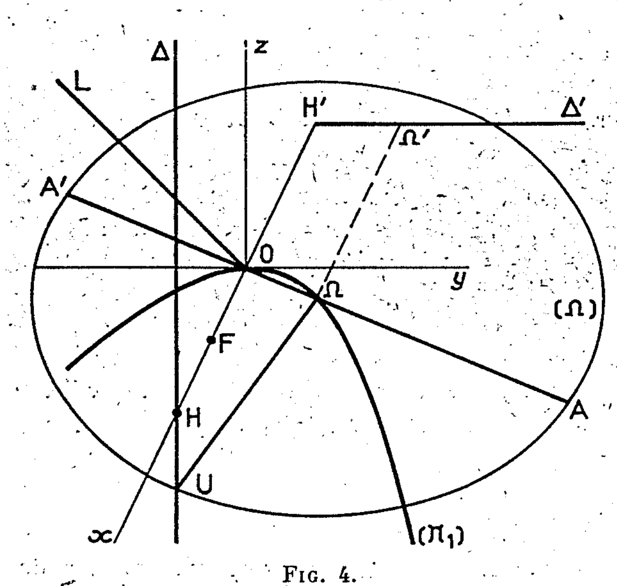


Fig. 4.

De l'étude des coniques (E) faite au § I résulte que les cercles (Ω) sont tangents aux plans $y = \varepsilon' ix$ en des points situés sur les verticales $y = \varepsilon' ix$, $\lambda x + \mu y + b^2 = 0$, soit

$$x = \frac{-b^2}{\lambda + \mu\varepsilon' i}, \qquad y = \frac{-b^2\varepsilon' i}{\lambda + \mu\varepsilon' i}, \qquad z = -b\varepsilon' i$$

et, puisque $$\lambda = \frac{\mu^2}{2b}, \qquad x = \frac{-2b^3}{\mu(\mu + 2b\varepsilon' i)}, \qquad y = \frac{2b^3\varepsilon' i}{\mu(\mu + 2b\varepsilon' i)}, \qquad z = -b\varepsilon' i;$$

le lieu des points de contact avec le plan $y = \varepsilon' ix$ est la droite $y = \varepsilon' ix, z = -b\varepsilon' i$.

Enveloppe des plans des cercles (Ω). — Les plans $\frac{\mu^2}{2b}y - \mu x - bz = 0$ enveloppent le cône de sommet O, d'équation $x^2 + 2yz = 0$, ou $x^2 + y^2 + z^2 - (y - z)^2 = 0$, cône de révolution d'axe OL $(x = 0,\ y + z = 0)$ et tangent aux plans $x\mathrm{O}y$, $x\mathrm{O}z$ le long de Oy et Oz respectivement; le demi-angle au sommet est $\frac{\pi}{4}$.

Équation de (Σ). — Éliminer μ entre

$$y\mu^2 - 2bx\mu - 2b^2z = 0 \quad \text{et} \quad x\mu^2 + 2by\mu - b(x^2 + y^2 + z^2 - b^2) = 0:$$

$$\left[y(x^2 + y^2 + z^2 - b^2) - 2bxz\right]^2 - 4b(x^2 + y^2)\left[x(x^2 + y^2 + z^2 - b^2) + 2byz\right] = 0.$$

(Σ) est du 6e degré, admet l'axe Ox comme axe de symétrie. Elle admet comme lignes doubles : l'ombilicale, l'axe Oz et, comme il résulte de l'étude des cercles (Ω), les droites isotropes

$$\frac{x+b}{\varepsilon i\sqrt{2}} = y - \varepsilon b i\sqrt{2} = z.$$

Sections par les plans de coordonnées :

x = 0 : $y^2[(y^2+z^2-b^2)^2 - 8b^2yz] = 0, \quad (y_2+z^2+b^2)^2 - 4b^2(y-z)^2 = 0$

$y = 0$ (Oz droite double); cercles $y^2+z^2 \pm 2b(y-z)+b^2 = 0$,

tangents à Oz ($z=b$ et $z=-b$) et à Oy ($y=-b$ et $y=b$)

y = 0 : $x^2[bz^2 - x(x^2+z^2-b^2)] = 0$: Oz, droite A, cercle $x^2+z^2+bx=0$.

z = 0 : Cercle $x^2+y^2-b^2=0$ et $y^2(x^2+y^2-b^2) - 4bx(x^2+y^2) = 0$,

courbe lieu des sommets des grands axes de (E) (I, 3°).

La figure 5 sur laquelle on suivra facilement les résultats obtenus est une épure où le plan xOy est horizontal et yOz frontal et où l'on utilise une projection frontale auxiliaire sur le plan vertical XOz.

2° Section de (Σ) par un plan passant par Oz. — Cette section est une courbe de degré 6 décomposée en la droite double Oz et une courbe de degré 4 qui a 4 points doubles, les points cycliques et les points où les isotropes doubles de (Σ) coupent le plan et qui, par conséquent, est elle-même décomposée en deux cercles qui ont en commun les deux derniers points doubles indiqués; chacun de ces cercles coupe le plan xOy en un point β sur le cercle $(0, b)$ et un point α sur la courbe (α). L'équation de la section dans son plan XOz est, en appelant θ l'angle (Ox, OX), obtenue en faisant

$$x = X\cos\theta, \quad y = X\sin\theta, \quad z = Z,$$

dans l'équation de (Σ) :

$$[(X^2+Z^2-b^2)\sin\theta - 2bZ\cos\theta]^2 - 4bX[(X^2+Z^2-b^2)\cos\theta + 2bZ\sin\theta] = 0,$$

ou, en posant

$$X^2+Z^2+b^2 = s, \qquad X + Z\sin\theta - b\cos\theta = P,$$

$$s^2\sin^2\theta - 4bsP\cos\theta - 4b^2P^2 = 0,$$

$$(s\sin\theta - 2bP\cot\theta)^2 - \frac{4b^2P^2}{\sin^2\theta} = 0,$$

$$\left[s\sin\theta - \frac{2bP(1+\cos\theta)}{\sin\theta}\right]\left[s\sin\theta + \frac{2bP(1-\cos\theta)}{\sin\theta}\right] = 0$$

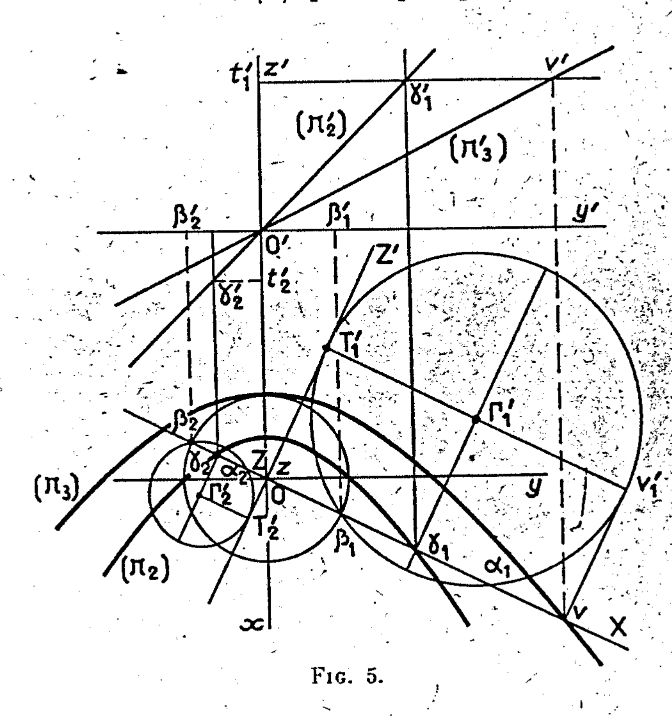


Fig. 5.

on a les deux cercles $(\Gamma_1)\ X^2+Z^2+b^2 - \frac{2bP}{1-\cos\theta} = 0$, $(\Gamma_2)\ X^2+Z^2+b^2+\frac{2bP}{1+\cos\theta} = 0$, qui se coupent aux points $X + Z\sin\theta - b\cos\theta = 0$ $X^2+Z^2+b^2=0$; ces points sont bien les points où le plan coupe les isotropes doubles de (Σ) définis par

$$X\cos\theta + b = \varepsilon i\sqrt{2}Z, \quad X\sin\theta - b\varepsilon i\sqrt{2} = Z$$

$$X(\cos\theta - \varepsilon i\sqrt{2}\sin\theta) = b, \qquad Z = -b\frac{\sin\theta + \cos\theta\varepsilon i\sqrt{2}\cos\theta}{\cos\theta - \varepsilon i\sqrt{2}\sin\theta},$$

qui vérifient
$$X + Z\sin\theta = \frac{b(1-\sin^2\theta - \varepsilon i\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta)}{\cos\theta - \varepsilon i\sqrt{2}\sin\theta} = b\cos\theta$$

et
$$X^2+Z^2 = b^2\frac{1+\sin^2\theta - 2\cos^2\theta + 2\varepsilon i\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta}{(\cos\theta - \varepsilon i\sqrt{2}\sin\theta)^2} = -b^2.$$

Les deux cercles
$$(1-\cos\theta)(X^2+Z^2+b^2) - 2b(X+Z\sin\theta - b\cos\theta) = 0,$$
$$(1+\cos\theta)(X^2+Z^2+b^2) + 2b(X+Z\sin\theta - b\cos\theta) = 0$$

coupent Oz aux points de cote Z telle que

$(1-\cos\theta)(Z^2+b^2) - 2bZ\sin\theta + 2b^2 = 0$, ou $\left(Z\sin\frac{\theta}{2} - b\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 = 0$ et $\left(Z\cos\frac{\theta}{2} + b\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 = 0$;

ils sont tangents à OZ aux points $T_1\left(Z = b\cot\frac{\theta}{2}\right)$, $T_2\left(Z = -b\tan\frac{\theta}{2}\right)$.

Les équations des cercles relativement à $Oxyz$ sont :

(1) $x \sin\theta - y \cos\theta = 0$, $(1 - \cos\theta)(x^2 + y^2 + z^2 + b^2) - 2b\left(\dfrac{x}{\cos\theta} + z\sin\theta - b\cos\theta\right) = 0$,

(2) $x \sin\theta - y \cos\theta = 0$, $(1 + \cos\theta)(x^2 + y^2 + z^2 + b^2) + 2b\left(\dfrac{x}{\cos\theta} + z\sin\theta - b\cos\theta\right) = 0$.

Les équations (2) se déduisent des équations (1) par $\theta \to \theta + \pi$; on a donc, en prenant les équations (1) tous les cercles (Γ) dont le centre $\Gamma\left(x = \dfrac{b\cos\theta}{1-\cos\theta},\ y = \dfrac{b\sin\theta}{1-\cos\theta} = z\right)$ décrit la parabole $(\Pi_2) y = z, y^2 = 2bx + b^2$ dont la projection (Π_2) sur xOy a pour foyer O et pour directrice $\Delta'(x = -b)$.

$(\Sigma)'$ est donc engendrée par le cercle du plan XOz de centre $X = \dfrac{b}{2}(1 + u^2)$, $Z = bu$, en posant $u = \operatorname{cotg}\dfrac{\theta}{2}$ de rayon $\dfrac{b}{2}(1 + u^2)$; il est donc défini par $X = b(1 + u^2)\left(\dfrac{1+\cos\varphi}{2}\right)$, $Z = bu + b\left(\dfrac{1+u^2}{2}\right)\sin\varphi$ ou, en posant $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2} = v$; $x = \dfrac{b(u^2 - 1)}{1 + v^2}$, $y = \dfrac{2bu}{1 + v^2}$; $z = b\left(u + v\dfrac{1 + u^2}{1 + v^2}\right)$. On a ainsi une représentation rationnelle en (u, v) de (Σ); les courbes $u = u_0$ sont les cercles (Γ); la courbe $v = v_0 = \operatorname{tg}\dfrac{\varphi_0}{2}$ est le lieu du point M de (Γ) tel que $(T\Gamma, TM) = \dfrac{\varphi_0}{2}$, la tangente à (L) en M faisant l'angle φ_0 avec Oz.

Contour apparent horizontal de (Σ). — Ce contour comprend le lieu des points V de (Γ) où la tangente est parallèle à Oz, c'est-à-dire Oz et la courbe $v = 0$, $x = b(1 - u^2)$, $y = 2bu$, $z = bu$, parabole $y - 4z = 0$, $x^2 + y^2 = (x - 2b)^2$ parabole dont la projection sur yOx a pour foyer O et pour directrice $x = 2b$. Cette parabole (Π_3) est déduite de (Π_2) lieu de Γ par la transformation $x' = 2x$, $y' = 2y$, $z' = z$, comme il était évident géométriquement

La projection sur xOy est bien la parabole trouvée (I, 4) comme enveloppe des ellipses (E) passant par $H(b, 0)$.

4. Volume V engendré par (Γ) quand Γ décrit l'arc de parabole défini en coordonnées cylindriques θ, r, z par $r = \dfrac{b}{1 - \cos\theta}$, $z = b\operatorname{cotg}\dfrac{\theta}{2}$, $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$; les cercles (Γ) obtenus pour $\theta = \pi - \alpha$ et $\theta = \pi + \alpha$ sont symétriques par rapport à Ox; $V = 2V_1$, V_1 étant le volume engendré par (Γ) lorsque $\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi$.

$$V_1 = \iiint_{(D)} r\,dr\,dz\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[\iint_{(\Gamma)} r\,dr\,dz\right]d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi b^3}{(1-\cos\theta)^3}\,d\theta$$

$$V_1 = \frac{\pi b^3}{4}\int_0^1 (1 + u^2)^2\,du = \frac{\pi b^3}{4}\left(u + \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5}\right)_0^1 = \frac{7\pi}{15}b^2, \quad V = \frac{14\pi}{15}b^3.$$

JEAN-CLAUDE MARTINI.

Assez bonne solution de M. QUINTARD, Les Sables d'Olonne.

EXAMENS ORAUX DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1960)

MATHÉMATIQUES

Questions posées.

Les questions orales du concours d'admission à l'École polytechnique en 1960 publiées dans la Revue sous les numéros 18800 et 18804 seront résolues dans l'un des prochains numéros. Nos abonnés peuvent, jusqu'au 31 décembre, nous faire parvenir leurs solutions.

Algèbre et Analyse.

18799. — Étudier les solutions positives de l'équation $\sin x = \dfrac{1}{x}$. Développer x_{2p} et x_{2p+1} suivant les puissances de $\dfrac{1}{p}$ jusqu'à l'ordre 3.

— **800.** — Étudier les solutions positives de l'équation $\operatorname{tg} x = \dfrac{x^2}{x+1}$. Développer la $n^{\text{ième}}$ solution, x_n, suivant les puissances décroissantes de n jusqu'à l'ordre 3.

MARTHE

71e Année. Août-Septembre 1960. N° 1-2.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Agrégation 1960 (Epreuves obligatoires, options et épreuves féminines)

Sujets donnés aux concours des Agrégations et aux concours d'entrée aux grandes Écoles en 1960.

PREMIÈRE PARTIE

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques élémentaires et *Mathématiques spéciales.*

5385. — *Indications générales.* — Toutes les figures étudiées sont situées dans un plan donné; on suppose ce plan orienté et une unité de longueur choisie; l'unité d'angle est le radian.

Les parties I, II, III, IV font intervenir, dans des conditions qui seront précisées en temps utile, deux cercles fixes, non concentriques. On appellera (A) et (A′) ces cercles, et, respectivement, A et A′ leurs centres R et R′ leurs rayons; O désignera le milieu du segment AA′ et l'on posera $OA = OA' = a$ $(a > 0)$.

I. — On donne un nombre α $\left(0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ et les deux cercles (A) et (A′) qui sont ici supposés *égaux* $(R' = R)$. On considère les deux axes OX, OY définis par $(OX, OA) = \alpha$, $(OX, OY) = +\frac{\pi}{2}$.

A chaque point M du cercle (A) on associe le point M′ du cercle (A′) tel que $(OX, AM) + (OX, A'M') = 0$, ainsi que (pour M et M′ distincts) la médiatrice Δ du segment MM′.

1° Former, par rapport au repère orthonormé ayant pour axes OX, OY, l'équation de l'enveloppe (H) de la médiatrice Δ, quand M décrit (A).

2° (H) est une hyperbole. Déterminer le diamètre conjugué D de la direction OX, par rapport à (H).

Former l'équation cartésienne de (H) par rapport à un repère dont les axes sont portés par les droites OX et D.

3° Pour quelles positions de M la droite associée Δ est-elle une asymptote de (H)?

Comment doit-on choisir deux points M_1 et M_2 de (A) pour que les droites associées Δ_1 et Δ_2 se coupent

ou bien en un point de la droite OX;

ou bien en un point de la droite D?

II. — Les deux cercles donnés (A) (A′) ont des rayons *inégaux* $(R' \neq R)$ et ont en commun un point S. On désigne par S′ le symétrique de S par rapport au milieu O du segment AA′ et par I le symétrique de S par rapport à la ligne des centres AA′ (I peut être confondu avec S).

A tout point M de (A) on associe le point M′ de (A′) tel que $(SA, AM) + (SA', A'M') = 0$.

Démontrer *géométriquement* que la médiatrice Δ du segment MM′ et le cercle (ou la droite) défini par les trois points I, M, M′, supposés distincts, passent tous deux par le point S′.

III. — 1° On donne un nombre positif k, différent de l'unité, un point ω et deux axes ωu, ωv, définissant un repère cartésien orthonormé.

On appelle (Σ) la transformation ponctuelle qui, au point P ayant pour coordonnées u, v, fait correspondre le point P′ ayant pour coordonnées $u' = ku$ et $v' = -kv$.

Le transformé par (Σ) d'un cercle est évidemment un cercle. Démontrer que, si P″ est le symétrique de P par rapport à ωu, la médiatrice du segment PP′ est la transformée de la médiatrice du segment PP″ dans une affinité orthogonale ayant pour base ωu; calculer le rapport de cette affinité (on suppose ici P différent de ω).

2° Conservant les mêmes notations, on définit deux cercles (A) et (A′) de la façon suivante: le cercle (A) est donné, ne passant pas par ω, et son centre A est distinct de ω; le cercle (A′) est le transformé de (A) par (Σ).

On appelle M un point quelconque de (A), M′ le transformé de M par (Σ) et Δ la médiatrice du segment MM′ (M, M′ distincts). Comparer les angles $(\omega u, \mathbf{AM})$ et $(\omega u, \mathbf{A'M'})$.

Démontrer que l'enveloppe de la droite Δ, quand M décrit (A), est une conique (Γ) qui peut être déduite de la conique (Γ_1) dont ω est un foyer et (A) un cercle directeur, par une transformation (T) produit de deux affinités orthogonales ayant pour bases ωu, ωv; calculer les rapports de ces affinités.

Quel est le centre de la conique (Γ)? Démontrer que la polaire du point ω par rapport à (Γ) est l'axe radical des cercles (A) et (A′).

IV. — On donne un nombre réel β et les deux cercles fixes (A) et (A′). On appelle $0x$ l'axe porté par la ligne des centres A′A, tel que $\overline{OA} = a$ et $0y$ l'axe défini par $(0x, 0y) = +\frac{\pi}{2}$; on définit ainsi un repère orthonormé, permettant de considérer chaque point Q du plan, ayant pour coordonnées x, y, comme l'image du nombre complexe $z = x + iy$; les centres A et A′ sont, en particulier, les images des nombres réels a et $-a$.

1° A tout point M de (A) on associe le point M′ de (A′) tel que

$$(0x, \mathbf{AM}) + (0x, \mathbf{A'M'}) = 2\beta.$$

Montrer que les affixes m et m' des points M et M′ sont liés par une relation de la forme

$$(m - a)(m' + a) = \mathrm{K},$$

K étant une constante complexe, que l'on calculera en fonction de R, R′, β. Cette relation est-elle équivalente à la relation angulaire associant M′ à M?

2° On considère alors la transformation qui fait correspondre à tout point Q, autre que A, ayant pour affixe z, le point Q′ dont l'affixe z' est défini par

$$(z - a)(z' + a) = \mathrm{K},$$

K étant la constante qui vient d'être calculée.

Cette transformation admet deux points doubles, en général distincts, F et F′; soient f et f' leurs affixes. Démontrer que, si F et F′ sont distincts, les rapports $\frac{\mathrm{FQ}.\mathrm{F'Q'}}{\mathrm{FQ'}.\mathrm{F'Q}}$ et $\frac{\mathrm{FQ}.\mathrm{F'Q'}}{\mathrm{QQ'}.\mathrm{FF'}}$ sont indépendants du point Q.

3° Supposant toujours F et F′ distincts, démontrer que, pour tout point M du cercle (A), les rapports $\frac{\mathrm{MF}.\mathrm{MF'}}{\mathrm{MM'}}$ et $\frac{\mathrm{M'F}.\mathrm{M'F'}}{\mathrm{MM'}}$ sont constants.

On désigne par N et N′ les projections orthogonales de F et F′ sur la médiatrice Δ du segment MM′. Démontrer que le produit $\overline{\mathrm{FN}}.\overline{\mathrm{F'N'}}$ a une valeur constante, K′ (on pourra, par exemple, utiliser les différences $\mathrm{FM}^2 - \mathrm{FM'}^2$ et $\mathrm{F'M}^2 - \mathrm{F'M'}^2$). Calculer K′.

On suppose $\mathrm{K'} \neq 0$; quand M décrit (A), la droite Δ reste tangente à une conique, dont on déterminera le cercle orthoptique.

On suppose $\mathrm{K'} = 0$; montrer que les cercles (A) et (A′) sont sécants; étudier la figure formée par ces cercles et les points F et F′.

4° On suppose $\mathrm{RR'} = a^2$, $\mathrm{R'} \neq \mathrm{R}$ et $\beta = \frac{\pi}{2}$; les points F et F′ sont alors confondus.

Démontrer que les rapports $\frac{\mathrm{OM}^2}{\mathrm{MM'}}$ et $\frac{\mathrm{OM'}^2}{\mathrm{MM'}}$ sont constants.

Que peut-on dire de la médiatrice Δ, quand M décrit (A)?

V. — Quelles relations peut-on établir entre les diverses parties du problème qui viennent d'être traitées, notamment entre les parties II et III et la partie IV?

En particulier, peut-on appliquer à l'étude de la conique (Γ), définie dans la question III, 2°, certains des résultats obtenus dans la partie IV?

Analyse.

5386. — Avertissement. — Les parties I et II sont indépendantes.

Tous les éléments considérés dans le problème sont réels.

Ayant choisi, dans le plan, deux axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$, on note ω le demi-plan ouvert défini par $y > 0$: tous les points et courbes considérés dans le problème sont dans ce demi-plan.

On rappelle qu'un *arc de Jordan*, dans le plan, est défini par une représentation paramétrique $x = x(t)$, $y = y(t)$, où les fonctions $x(t)$, $y(t)$ sont définies et continues sur un intervalle borné fermé; on supposera en outre l'existence et la continuité des dérivées $x'(t)$, $y'(t)$ dans le même intervalle borné, fermé.

Position d'un problème de variations. — On donne, pour $y > 0$, une fonction $f(y)$, à valeurs finies et strictement positives, continue et pourvue de dérivées première et seconde continues.

On note :

C un arc de Jordan, d'extrémités A et B, tracé dans ω :

s l'abscisse curviligne, comptée de A vers B, du point courant de C;

I (C) l'intégrale curviligne $\int_A^B f(y)ds$, prise le long de C.

Le problème consiste à choisir C, lorsque les points A et B sont donnés, de manière que l'intégrale I (C) soit minimum.

Rappel de résultats classiques. — Les candidats utiliseront, en les admettant, les indications suivantes, qui reproduisent les résultats classiques du calcul des variations, adaptés au présent problème :

1° Une condition nécessaire pour que I (C) soit minimum est que C soit une courbe intégrale de l'*équation d'Euler :*

$$\frac{f(y)}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{const.} = a;$$

on appelle *extrémales* du problème les courbes intégrales de l'équation d'Euler.

2° Indications utiles seulement au I,7° et au II,5° :

a) On dit qu'une famille d'extrémales issues d'un même point A est un *champ d'extrémales* dans un domaine Δ du plan, si chaque point M de Δ, de coordonnées x, y, est joint à A par une extrémale unique de la famille, dont la tangente en M a pour coefficient angulaire une fonction de x, y continûment différentiable dans Δ;

b) On donne deux points A et M_0, un arc de Jordan Γ issu de M_0 et un champ d'extrémales issues de A dans un domaine contenant Γ; pour chaque point M de Γ, on note Γ_M la partie de Γ comprise entre M_0 et M et C_M l'extrémale du champ qui joint A et M. Alors la différence $I(\Gamma_M) - I(C_M)$ est fonction croissante de l'abscisse de M, lorsque celle-ci est supérieure aux abscisses de A et M_0; plus précisément, cette fonction est strictement croissante si les courbes C_M et Γ_M ne sont pas tangentes en M; par contre, elle est constante si les deux courbes sont tangentes en M pour tout point M de Γ.

I. — 1° Déterminer la fonction f pour que les homothéties positives, centrées sur $x'x$, conservent l'ensemble des courbes extrémales dans ω.

2° Pour cette deuxième question, on prend $f(y) = \sqrt{y}$; indiquer la nature géométrique des extrémales; un point A de ω étant donné, montrer que le nombre des extrémales joignant A à un point quelconque B de ω dépend de la position de B par rapport à une courbe E, que l'on précisera. Montrer que toutes les extrémales, non dégénérées, passant par A, sont tangentes ou asymptotes à E.

3° Dans toute la suite de cette partie I, on prend $f(y) = y^{\frac{1}{m}}$, m étant un nombre quelconque supérieur ou égal à 1 ($m \geqslant 1$).

Donner la représentation paramétrique des extrémales, en adoptant sur chacune d'elles le paramètre t tel que $\operatorname{tg} t = \frac{dy}{dx}$, $|t| < \frac{\pi}{2}$. Indiquer la forme des extrémales et préciser la nature de leur branche infinie.

Étant données deux courbes extrémales distinctes, C et C′, montrer que, en général, elles se correspondent dans une homothétie positive centrée sur $x'x$; en déduire que C et C′ ont exactement deux points communs, sauf quelques cas d'exception, que l'on précisera.

4° On considère, en particulier, les extrémales passant par un point A donné dans ω : prenant, pour simplifier, 0 et 1 comme coordonnées de A, écrire la représentation paramétrique, en fonction de t et θ, de l'extrémale C_θ passant par A, dont la tangente en A a pour coefficient angulaire $\operatorname{tg}\theta \left(|\theta| < \frac{\pi}{2}\right)$.

Montrer que les courbes C_θ ont une enveloppe E, chacune d'elles, sauf une, touchant E en un point unique T, de paramètre $t = \tau(\theta)$ sur C_θ, de coordonnées $u(\theta)$, $v(\theta)$.

Indiquer le sens de variation des fonctions $\tau(\theta)$, $u(\theta)$, $v(\theta)$.

5° Former une équation différentielle du premier ordre, à variables séparées, admettant la fonction $\tau(\theta)$ comme solution particulière; en déduire le comportement de $\tau(\theta)$ quand θ tend vers 0 ou $\pm\frac{\pi}{2}$.

Montrer que $u(\theta)$ et $v(\theta)$ sont infiniment grands quand $\theta \to 0$, infiniment petits quand $\theta \to \pm\frac{\pi}{2}$ et trouver, dans chacune de ces circonstances, la partie principale de v en fonction de u, en distinguant les cas $m > 1$ et $m = 1$.

Indiquer la forme de la courbe E.

6° Étudier les variations de la fonction $\delta(\theta)$, ordonnée du point où C_θ coupe une droite donnée $x = \gamma$. En déduire que les courbes C_θ sont toutes dans une même partie P de ω limitée par E et que tout point B de P, non situé sur E ni sur Oy, peut être joint à A par deux extrémales C_1, C_2; on notera C_2 celle qui touche E entre A et B.

7° Posant $p = \dfrac{m}{m+1}$, établir les inégalités

$$I(C_1) < I(C_2) < I(C_1) + 2p.$$

Montrer que, pour tout arc de Jordan Γ partant de A et rencontrant E, on a $I(\Gamma) > p$. En déduire que P contient le disque de centre A et de rayon $2^p - 1$ et que, pour tout point B de ce disque, l'extrémale C_1 réalise bien le minimum de $I(C)$.

II. — Dans cette dernière partie du problème, on se propose de choisir la fonction f de manière que deux points quelconques de ω puissent être joints par une extrémale et une seule; pour cela, on impose à la fonction $f(y)$ les conditions suivantes :

a) comme il a été dit dans l'Introduction, elle est, pour $y > 0$, finie et strictement positive, continue ainsi que ses dérivées première et seconde;

b) elle est strictement décroissante et tend vers 0 quand $y \to +\infty$;

c) la fonction $\dfrac{f'(y)}{f(y)}$ est strictement croissante.

On pose $\lim\limits_{y \to 0} f(y) = \lambda$ et $\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{f'(y)}{f(y)} = -\mu$, λ pouvant être fini ou valoir $+\infty$.

1° Dresser, pour $0 < z < \lambda$, le tableau de variation de la fonction $y = g(z)$, inverse de la fonction $z = f(y)$, et celui de la fonction $h(z) = -zg'(z)$.

2° Écrire, à l'aide des fonctions g et h, la représentation paramétrique des extrémales, en adoptant sur chacune d'elles le paramètre t tel que $\operatorname{tg} t = -\dfrac{dy}{dx}$, $|t| < \dfrac{\pi}{2}$.

Indiquer la forme d'une courbe extrémale C; évaluer, en fonction des constantes d'intégration attachées à C, d'une part l'ordonnée $k(C)$ du point de C le plus éloigné de $x'x$, d'autre part la distance $l(C)$ des points d'intersection de C avec $x'x$.

3° Étant données deux courbes extrémales distinctes C et C′, montrer qu'il y a au plus une valeur x_1 telle que C et C′ aient des tangentes parallèles en leurs points d'abscisse x_1; en déduire que C et C′ ont au plus deux points communs.

Montrer que $k(C) \leqslant k(C')$ entraîne $l(C) \leqslant l(C')$; en déduire que les courbes C et C′ ont au plus un point commun et ne sont pas tangentes.

4° On considère, en particulier, les extrémales passant par un point A, donné dans ω, de coordonnées α, β; prenant, pour simplifier, $\alpha = 0$, $f(\beta) = 1$, écrire la représentation paramétrique, en fonction de t et θ, de l'extrémale C_θ, passant par A, dont la tangente en A a pour coefficient angulaire $\operatorname{tg}\theta$ $\left(|\theta| < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Quelles sont les limites, quand $\theta \to \pm\dfrac{\pi}{2}$, des points d'intersection de C_θ avec $x'x$?

5° Dans le cas $\mu = 0$, montrer que deux points quelconques de ω peuvent être joints par une extrémale unique, qui réalise bien le minimum de $I(C)$.

Dans le cas $\mu > 0$, quel est le lieu des points de ω qui peuvent être joints, par une extrémale, au point donné A?

Mathématiques appliquées.

5387. — N.-B. — Il n'est pas nécessaire d'avoir traité la partie I du problème pour aborder l'étude de la partie II. La présentation des calculs constituera un élément d'appréciation des copies.

I. — 1° Intégrer l'équation différentielle

$$(1) \qquad x(yy'' - 3y'^2) - (2x^2 + 1)yy' = 0,$$

y désignant une fonction *réelle*, dérivable, de la variable réelle x, et y', y'' étant les dérivées première et seconde de y par rapport à x.

Montrer que toutes les fonctions y, solutions de (1), autres que la solution $y = 0$, peuvent être définies par une relation de la forme

$$(2) \qquad \frac{1}{y^2} = Af(x) + B,$$

$f(x)$ étant une fonction telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = e$ (e désignant la base des logarithmes népériens) et A et B deux constantes. Donner l'expression explicite de la fonction $f(x)$ et préciser les conditions d'inégalité qui doivent être imposées aux constantes A et B.

2° Dans un plan rapporté à un repère cartésien orthonormé (origine O, axes **O*x*** et **O*y***), on désigne par (x, y) les coordonnées d'un point quelconque et par (R) la région pour laquelle l'ordonnée y est positive. On considère, dans ce plan, les courbes intégrales de (1) représentant les fonctions positives y définies par la relation (2) correspondant aux diverses valeurs possibles des constantes A et B. Soit (Γ) l'une de ces courbes.

Quelles conditions doivent vérifier les constantes A et B pour que la courbe (Γ) correspondante admette des points d'inflexion?

On donne, dans la région (R), un point P par ses coordonnées (x_0, y_0). Existe-t-il une courbe (Γ) admettant P comme point d'inflexion? Exprimer, en fonction de x_0, y_0, les constantes A et B correspondant à une telle courbe.

3° On appelle (Γ_0) la courbe (Γ) correspondant à $B = 0$, $A = 1$, et (F) et (F′) les deux familles de courbes (Γ) correspondant respectivement à $B = 1$ et $B = -1$, A restant variable.

Indiquer la forme de (Γ_0), ainsi que les diverses formes possibles, suivant les valeurs de A, des courbes de (F) et de (F′); on demande seulement un tracé sommaire faisant apparaître l'existence de branches infinies, de points d'inflexion, de points où la tangente est parallèle à **O*x***.

Déterminer le lieu des points d'inflexion des courbes des familles (F) et (F′) et indiquer la forme de ce lieu.

(Les tracés demandés ci-dessus ne doivent pas être faits sur papier millimétré.)

Par quelles transformations géométriques simples peut-on déduire toutes les courbes intégrales de (1) des courbes (Γ) qui viennent d'être étudiées?

II. — Les notations restant les mêmes, on considère la fonction

$$g(x) = \frac{2}{\sqrt{1 + e^{(x^2)}}}.$$

(Pour éviter toute confusion, on précise que la notation $e^{(x^2)}$ représente le nombre e élevé à la puissance x^2.)

On appelle (C) la courbe définie, dans un repère cartésien orthonormé, par l'équation $y = g(x)$. On se propose de calculer une valeur approchée de l'aire limitée par la courbe (C) et les axes **O*x***, **O*y*** et mesurée par l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(x).dx$.

1° Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(x).dx$ a un sens; soit Σ sa valeur numérique. Désignant par α un nombre positif, calculer une limite supérieure de l'erreur commise lorsque l'on prend comme valeur approchée de Σ l'intégrale $\int_0^{\alpha} g(x).dx$. On utilisera la remarque suivante :

pour $x > \alpha$, on a $g(x) < \dfrac{2}{\sqrt{1 + e^{\alpha x}}}$ et, *a fortiori*, $g(x) < 2e^{-\frac{\alpha x}{2}}$.

Quelle valeur entière α_0 suffit-il de donner à α pour que ladite erreur soit inférieure à 0,001?

2° On appelle σ l'aire limitée par la courbe (C) et mesurée par l'intégrale $\int_0^{\alpha_0} g(x).dx$. Son calcul est proposé au paragraphe 6°. Dans ce but, calculer, avec la précision que l'on estimera nécessaire, des valeurs approchées des nombres $g\left(\frac{k}{2}\right)$, k prenant toutes les valeurs entières de 0 à $2\alpha_0$.

3° Calculer les valeurs décimales, approchées par défaut à 0,01 près, des coordonnées du point d'inflexion K de (C) dont l'abscisse est positive et de la pente de la tangente d'inflexion correspondante.

4° Soit S le point de (C) situé sur **O*y***; former l'équation de la parabole (Δ) ayant pour sommet S, pour axe la droite O*y* et admettant en S le même cercle osculateur que (C). Montrer que cette parabole coupe (C) en un point Q dont l'abscisse est positive; placer ce point par rapport au point d'inflexion K.

5° Construire, sur papier millimétré, en utilisant les résultats précédents, l'arc de (C) correspondant à $0 \leqslant x \leqslant \alpha_0$, et l'arc de la parabole (Δ) correspondant à $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. (On prendra comme unité de longueur 5 centimètres.)

6° On admettra, pour la suite des calculs et raisonnements, que l'on peut, sans erreur sensible, confondre le point d'inflexion K avec le point K′ de (C) dont l'abscisse est 1,5.

On cherchera un encadrement de l'aire σ définie au paragraphe 2°, au moyen d'aires de trapèzes rectangles inscrits et exinscrits à la courbe (C); on prendra des trapèzes ayant pour hauteurs 0,5 et 0,25 et dont les aires peuvent être calculées en utilisant uniquement les résultats numériques déjà obtenus.

Montrer, sans effectuer de calculs numériques, que la différence entre les sommes des aires des trapèzes exinscrits et inscrits dans l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1{,}5$ peut être représentée simplement par l'aire d'un triangle rectangle ayant un sommet en K'. Évaluer cette différence. Faire de même pour l'intervalle $1{,}5 \leqslant x \leqslant \alpha_0$. Que peut-on déduire de cette étude?

Donner une valeur approchée de l'intégrale Σ et apprécier l'erreur commise.

Mécanique générale.

5388. — On se propose d'étudier quelques propriétés d'un système gyroscopique conçu pour renseigner sur la direction du Nord géographique en un lieu donné de la surface de la Terre.

Celle-ci, qu'on supposera sphérique de centre T, de rayon R, est animée par rapport au système trirectangle direct $T\xi_1\eta_1\zeta_1$ dont les axes ont des directions invariables par rapport aux étoiles, d'une rotation uniforme portée par $T\zeta_1$, de mesure

$$\Omega = \frac{2\pi}{86\,000}\ \text{rd/s}.$$

Relativement à un système trirectangle positif $T\xi\eta\zeta_1$ lié à la terre, la position d'un point O à sa surface est repérée par les coordonnées géographiques usuelles, la latitude λ, ou angle que fait le segment TO avec le plan équatorial $T\xi\eta$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{\pi}{2},\ \lambda > 0\right.$ ou < 0 selon que O appartient ou non à l'hémisphère Nord), la longitude L, ou angle des demi-plans $PP'\xi$ et $PP'O$, PP' étant la ligne des pôles portée par $T\zeta_1$.

On définit au point O le repère $Ox_1y_1z_1$ trirectangle positif tel que Ox_1 soit tangent au parallèle du lieu, que Oy_1 soit tangent au méridien et dirigé vers le Nord, que Oz_1 ait la direction de la verticale ascendante.

A ce sujet, on fera l'hypothèse que l'accélération de la pesanteur g, qui, on le rappelle, est la somme géométrique de la force d'inertie d'entraînement due au mouvement de $T\xi\eta\zeta_1$ par rapport à $T\xi_1\eta_1\zeta_1$ et de l'attraction exercée par la Terre sur la masse unité peut être représentée dans le voisinage du point O par le vecteur

$$\mathbf{g} = -g.\mathbf{z}_1,$$

($g = 9{,}8$ m/s², $\mathbf{z}_1$ vecteur unitaire de l'axe Oz_1). Il est en outre précisé que le système $T\xi_1\eta_1\zeta_1$ peut être considéré comme galiléen et que les actions des astres autres que la Terre sont négligeables.

Soient Ox et Oz les axes respectivement déduits de Ox_1 et Oz_1 par les rotations d'angle ψ et θ autour de Oz_1 et Ox, puis Oy tel que le repère $Oxyz$ soit trirectangle positif.

Le système gyroscopique S, de masse totale m, comprend deux parties :

le cadre, solide mobile sans frottement autour du point O, a pour axes principaux d'inertie en ce point Ox', Oy, Oz', formant un système trirectangle positif, et pour moments d'inertie associés A_1, B_1, C_1;

le gyroscope proprement dit, solide homogène de révolution autour de Oy a pour centre d'inertie le point O et pour moments d'inertie B_0 par rapport à Oy et A_0 par rapport à tout axe perpendiculaire en O à Oy. On pourra utiliser, s'il y a lieu, la notation

$$A = A_0 + A_1,\ B = B_0 + B_1,\ C = A_0 + C_1.$$

Le centre d'inertie du système total est le point G, défini par $\mathbf{OG} = -l.\mathbf{z}'$ (l constante positive donnée, $\mathbf{z}'$ vecteur unitaire de l'axe $\mathbf{O}z'$). On désigne par φ l'angle $(\mathbf{O}x,\ \mathbf{O}x')$ compté autour de $\mathbf{O}y$ et, la rotation du gyroscope par rapport à $Oxyz$ étant $\omega\mathbf{y}$ ($\mathbf{y}$ vecteur unitaire de l'axe $\mathbf{O}y$), on suppose que, grâce à un mécanisme convenable intérieur au système S, ω est maintenue constante, positive.

En outre, on admet que les rapports, $\frac{\Omega}{\omega}$, $\frac{\omega\Omega B_0}{mlg}$ et $\frac{mlg\,C}{\omega^2 B_0^2}$ sont petits par rapport à l'unité et qu'on peut, *pour le cadre seulement*, négliger les forces d'inertie de Coriolis qu'introduit la théorie du mouvement relatif appliquée au système S dans son mouvement par rapport à $Ox_1y_1z_1$.

N. B. — Les deux premières questions de la partie II sont indépendantes de celles proposées dans la partie I.

I. — Le point O est fixe par rapport à la Terre.

1° L'étude du mouvement relatif du système S par rapport au repère $Ox_1y_1z_1$ introduit naturellement des forces fictives dites d'entraînement et de Coriolis (le repère $Ox_1y_1z_1$, non galiléen a, on le rappelle, un mouvement connu par rapport au repère galiléen $T\xi_1\eta_1\zeta_1$).

Quelles sont les expressions de ces forces pour un point matériel du système?

Montrer que les projections sur les axes $Oxyz$ du moment résultant en O de ces forces de Coriolis relatives au gyroscope du système S ont pour mesures :

Ox $\quad B_0\Omega_3(\psi' \sin\theta + \omega) - (2A_0 - B_0)\,\Omega_2\psi' \cos\theta,$

Oy $\quad B_0(\Omega_1\psi' \cos\theta - \Omega_3\theta'),$

Oz $\quad (2A_0 - B_0)\Omega_2\theta' - B_0\Omega_1(\psi' \sin\theta + \omega),$

où Ω_1, Ω_2, Ω_3, qu'on demande d'expliciter, sont les mesures des projections sur les axes $Oxyz$ de la rotation instantanée de la Terre $\Omega\zeta_1$ (ζ_1 vecteur unitaire de l'axe $T\zeta_1$).

2° Quelles sont les projections sur les axes $Oxyz$ du moment cinétique en O, d'une part du gyroscope, d'autre part du cadre, dans leurs mouvements par rapport à $Ox_1y_1z_1$? Former le système d'équations différentielles E que doivent vérifier ψ, θ, φ.

3° Montrer que le système E possède une solution stationnaire : $\psi = 0$, $\theta = \theta_0$, $\varphi = 0$. Préciser la valeur numérique de θ_0 pour $ml = 0{,}90$, $B_0 = 0{,}34$, avec les unités : mètre, kg-masse, seconde, la rotation ω étant 8 000 tours par minute et $\lambda = 45°$.

4° Considérant formellement ψ, $\theta - \theta_0$, φ et leurs dérivées par rapport au temps comme quantités infiniment petites, toutes du même ordre, et en négligeant θ_0, écrire le système différentiel linéaire E* vérifié par ψ, $\Theta = \theta - \theta_0$, φ, qu'on obtient à partir de E en ne conservant que les termes d'ordre le moins élevé, conformément à la convention précitée.

Montrer que $\psi = 0$, $\Theta = 0$, $\varphi = 0$ est une solution stable du système E*. Préciser les périodes.

II. — On suppose désormais le point O animé d'un mouvement connu à la surface de la Terre.

1° On représente la vitesse et l'accélération de O par rapport à $T\xi\eta\zeta_1$ respectivement par

$$ux_1 + vy_1 \quad \text{et} \quad Ux_1 + Vy_1 + Wz_1$$

($x_1, \ldots$ vecteurs unitaires portés par les axes $Ox_1, \ldots$).

Écrire les formules qui permettent de faire le calcul de ces grandeurs au moyen de λ, L et de leurs dérivées par rapport au temps.

2° On considère, à un instant donné, le champ de vecteurs défini en tout point M au voisinage de O par la différence entre les accélérations par rapport à $T\xi_1\eta_1\zeta_1$ des points respectivement liés à $Ox_1y_1z_1$ et à $T\xi\eta\zeta_1$, qui se trouvent en M à l'instant considéré.

Montrer que, sous les hypothèses

$$\text{Max}\left(\left|\frac{\lambda'}{\Omega}\right|, \left|\frac{L'}{\Omega}\right|\right) \leqslant \frac{1}{30}, \quad \text{Max}\left(\left|\frac{\lambda''}{\Omega^2}\right|, \left|\frac{L''}{\Omega^2}\right|\right) \leqslant 1 \quad \left(\lambda' = \frac{d\lambda}{dt}, \lambda'' = \frac{d^2\lambda}{dt^2}, \text{etc.}\right),$$

et pour tout point M d'une boule de centre O, de rayon 0,2 cm, la différence des vecteurs du champ aux points M et O est en valeur absolue au plus égale à $10^{-9}\, g$. On admettra ainsi dans la suite qu'un tel champ peut être considéré comme uniforme.

3° Écrire les équations du mouvement du système S.

4° On suppose que le point O, initialement fixe par rapport à la Terre, est brusquement mis en mouvement, prenant ainsi une vitesse $ux_1 + vy_1$. Le système S étant initialement en l'état stationnaire prévu au paragraphe I, 3°, quelle sera la discontinuité de vitesses qu'il subit?

5° On suppose le point O mobile le long d'un méridien à vitesse constante v.

En admettant que v soit assez petit pour que l'on puisse ne pas tenir compte de la variation de latitude écrire à partir du système différentiel demandé au paragraphe II, 3° les équations qui permettent de définir une solution stationnaire, voisine de celle définie au paragraphe I, 3°.

Établir la possibilité d'un développement en série entière suivant les puissances de $\frac{v}{R}$ de cette solution et en calculer les termes du premier ordre.

AGRÉGATION FÉMININE DE MATHÉMATIQUES

Les épreuves de mathématiques élémentaires et mathématiques spéciales, de mathématiques appliquées, de mécanique générale étaient communes avec celle de l'Agrégation masculine. Celle d'analyse était différente. Nous la reproduisons ci-après.

Analyse.

5389. — Toutes les fonctions intervenant dans ce problème sont supposées pourvues, dans les domaines où elles sont étudiées, de dérivées partielles continues, jusqu'à l'ordre dont on aura besoin.

I. — L'espace est rapporté à un système de coordonnées cartésiennes dont les axes sont Ox, Oy, Oz. On considère une surface (σ) définie par l'équation

$$z = f(x, y),$$

$f(x, y)$ représentant une fonction des variables indépendantes x, y dont les dérivées partielles sont notées, suivant l'usage,

$$p = f'_x(x, y), \qquad q = f'_y(x, y),$$
$$r = f''_{x^2}(x, y), \qquad s = f''_{xy}(x, y), \qquad t = f''_{y^2}(x, y).$$

Les cinq variables (x, y, z, p, q) considérées aux différents points de (σ) sont des fonctions de x, y. On se propose de faire, sur cet ensemble, un changement de variables, en prenant comme nouvelles variables indépendantes x et q, et l'on pose

$$x = \alpha, \ q = \beta.$$

Cette opération est en général possible et les cinq variables (x, y, z, p, q) deviennent alors des fonctions de α, β. Montrer que, si l'on considère la fonction

$$g(\alpha, \beta) = z - \beta y,$$

les variables (x, y, z, p, q) s'expriment simplement en fonction de α, β, de g et des dérivées premières g'_α, g'_β; former ces expressions.

Démontrer que l'équation différentielle des lignes asymptotiques de (σ) peut être mise sous la forme

$$g''_{\alpha^2}d\alpha^2 - g''_{\beta^2}d\beta^2 = 0.$$

Donner l'expression des dérivées secondes r, s, t en fonction des dérivées de $g(\alpha, \beta)$.

II. — L'espace étant rapporté à un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires dont les axes sont **OX, OY, OZ,** on désigne par (Σ) la surface enveloppe du plan ayant pour équation

$$(1 - \alpha\beta)X + i(1 + \alpha\beta)Y + (\alpha + \beta)Z + G(\alpha, \beta) = 0,$$

où $G(\alpha, \beta)$ représente une fonction de deux variables indépendantes α, β, qui n'ont, pour le moment, aucun rapport avec les variables α, β de la partie I; la lettre i désigne l'imaginaire pure de module 1.

Considérant, aux différents points de (Σ), la cote Z comme fonction des deux premières coordonnées X et Y, on appelle P et Q les dérivées partielles premières de Z respectivement par rapport à X et à Y. Exprimer, en fonction de α, β, de G et des dérivées premières G'_α, G'_β, les cinq variables (X, Y, Z, P, Q) correspondant à un point quelconque de (Σ) défini par les valeurs α, β des paramètres. (Il sera commode de faire intervenir les expressions $U = X + iY$, $V = X - iY$.)

Démontrer que l'équation différentielle des lignes de courbure de (Σ) peut être mise sous la forme

$$G''_{\alpha^2}d\alpha^2 - G''_{\beta^2}d\beta^2 = 0.$$

III. — L'analogie de forme que présentent les équations définissant les lignes asymptotiques de (σ) et les lignes de courbure de (Σ) invite à étudier la correspondance existant entre une surface (σ) de l'espace rapporté au repère $Oxyz$ — espace qui sera appelé (e) — et une surface (Σ) de l'espace rapporté au repère OXYZ — espace qui sera appelé (E) —, lorsqu'on suppose que les variables indépendantes α, β intervenant dans I et dans II sont les mêmes et que les fonctions $g(\alpha, \beta)$ et $G(\alpha, \beta)$ coïncident :

$$g(\alpha, \beta) = G(\alpha, \beta).$$

Dans cette hypothèse, les deux systèmes de cinq relations, précédemment obtenus, qui définissent, en fonction de α, β et des fonctions g et G, les variables (x, y, z, p, q) relatives à (σ) et les variables (X, Y, Z, P, Q) relatives à (Σ), permettent d'établir un nouveau système (R) de cinq relations entre x, y, z, p, q et X, Y, Z, P, Q, relations où ne figurent explicitement ni les paramètres α, β, ni la fonction g (ou G). Former ces relations (R).

Montrer que les relations (R) définissent, en général, d'une manière unique (X, Y, Z, P, Q) en fonction de (x, y, z, p, q).

Exprimer inversement, à partir des relations (R), (x, y, z, p, q) en fonction de (X, Y, Z, P, Q), en précisant d'abord comment x et q peuvent être calculés en fonction de P et Q.

Quelle relation géométrique existe-t-il entre deux surfaces, l'une (s) de l'espace (e), l'autre (S) de l'espace (E), lorsque les variables (x, y, z, p, q) relatives à (s) et les variables (X, Y, Z, P, Q) relatives à (S) sont liées par les relations (R)?

IV. — Montrer que l'on peut déduire des relations (R) un système (R') de deux relations, qui ne contiennent que les variables x, y, z et X, Y, Z, et qui peuvent être mises sous la forme

$$(R') \begin{cases} x(X - iY) + y - Z = 0, \\ xZ + z + (X + iY) = 0. \end{cases}$$

73e Année. Décembre 1962. N° 5.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(Fondée en 1890.)

Agrégation 1961 (Analyse)

PREMIÈRE PARTIE

CONDITION POUR QU'UNE QUADRIQUE SOIT DE RÉVOLUTION

par **M. J. Delassus**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Poitiers.

Nous croyons utile de souligner, en quel point précis du raisonnement que nous avons fait dans notre note du n° 4 (Novembre 1962) intervient l'hypothèse qu'on opère en géométrie réelle.

Posons donc le problème de géométrie complexe (ou d'algèbre) : *Condition pour que la matrice carrée symétrique* $\mathcal{A}$ *ait une valeur propre double*, λ.

Cette condition équivaut à : *la matrice symétrique* $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} - \lambda I$ *admet une valeur propre double nulle* $\mu = 0$.

On comprend d'ailleurs très bien que, la matrice $\mathcal{A}_1$ dépendant d'un paramètre, la condition sur elle soit plus précise (la valeur double est maintenant fixée : $\mu = 0$).

Dans le cas réel, on utilise la similitude d'une matrice symétrique à une matrice diagonale (formée des valeurs propres) pour obtenir la condition sur le rang. Afin de conserver le caractère symétrique de A_1, il a fallu employer une matrice orthogonale de passage. Or cet emploi d'une matrice orthogonale n'est pas prohibé en tant que tel en géométrie complexe. L'échec du raisonnement dans ce dernier cas vient de ce qu'une telle matrice orthogonale n'existe pas nécessairement :

En effet, les vecteurs colonnes d'une telle matrice sont des vecteurs propres de $\mathcal{A}_1$ qui doivent être ensuite normés (au sens de la norme euclidienne); rien n'empêche un vecteur propre complexe non nul d'avoir une norme euclidienne nulle : un vecteur isotrope ne peut être normé (à ce sens).

C'est d'ailleurs la seule raison : s'il n'y avait pas de vecteur isotrope parmi les vecteurs propres de $\mathcal{A}_1$, la démonstration de la possibilité de la diagonalisation se poursuivrait comme dans le cas réel. On vérifie effectivement par le calcul que tout vecteur propre de $\mathcal{A}_1$ correspondant à $\mu = 0$ est isotrope lorsque $\mathcal{A}_1$ est de rang 2.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Concours de 1961.

5449. — Note préliminaire. — La partie I du problème n'a d'autre objet que de donner une définition et de mettre en évidence quelques propriétés de deux familles de fonctions dépendant d'un paramètre réel λ, les résultats à établir étant d'ailleurs explicitement indiqués dans l'énoncé. Il est recommandé de ne pas s'attarder trop longuement sur ces questions, afin de réserver un temps suffisant à l'étude de la fonction particulière proposée dans la partie II.

Problème. — *On désigne par* t *une variable réelle, par* f_0 *et* g_0 *les deux fonctions définies par les conditions, pour* $t \neq 0$,

$$f_0(t) = \frac{1 - \cos t}{t} \quad \text{et} \quad g_0(t) = \frac{\sin t}{t},$$

avec

$$f_0(0) = 0, \quad g_0(0) = 1.$$

I. — *Soit* λ *une constante réelle donnée, strictement supérieure à* (-1) :

$$\lambda + 1 > 0.$$

1° *Indiquer très brièvement pourquoi la condition imposée à* λ *entraîne l'existence (ou la convergence) des deux intégrales :*

$$\int_0^a \left(\frac{u}{a}\right)^\lambda f_0(u)\, du, \qquad \int_0^a \left(\frac{u}{a}\right)^\lambda g_0(u)\, du,$$

a *étant un nombre réel non nul.*

On considère alors les deux fonctions f_λ *et* g_λ *définies, pour* $t \neq 0$, *par les relations*

$$f_\lambda(t) = f_0(t) - \frac{\lambda}{t}\int_0^t \left(\frac{u}{t}\right)^\lambda f_0(u)\, du,$$
$$g_\lambda(t) = g_0(t) - \frac{\lambda}{t}\int_0^t \left(\frac{u}{t}\right)^\lambda g_0(u)\, du.$$

Démontrer que f_λ *est une fonction impaire, que* g_λ *est une fonction paire et que l'on a, pour* $t > 0$,

$$f_\lambda(t) = \frac{1-\cos t}{t} - \frac{1}{t^{\lambda+1}}\int_0^t \lambda u^{\lambda-1}(1-\cos u)\, du = \frac{1}{t^{\lambda+1}}\int_0^t u^\lambda \sin u\, du = \int_0^1 v^\lambda \sin(vt)\, dv,$$
$$g_\lambda(t) = \frac{\sin t}{t} - \frac{1}{t^{\lambda+1}}\int_0^t \lambda u^{\lambda-1}\sin u\, du = \frac{1}{t^{\lambda+1}}\int_0^t u^\lambda \cos u\, du = \int_0^1 v^\lambda \cos(vt)\, dv.$$

On complète la définition de ces fonctions par les conditions

$$f_\lambda(0) = 0 \quad \text{et} \quad g_\lambda(0) = \frac{1}{\lambda+1}.$$

Démontrer que les fonctions f_λ *et* g_λ *sont alors continues dans tout l'intervalle* $(-\infty, +\infty)$.

2° *Démontrer que les fonctions* f_λ *et* g_λ *admettent, dans ce même intervalle, des dérivées premières (par rapport à t), que l'on notera* f'_λ *et* g'_λ *vérifiant les relations*

$$f'_\lambda(t) = g_{\lambda+1}(t), \qquad g'_\lambda(t) = -f_{\lambda+1}(t),$$

et

$$\begin{cases} tf'_\lambda(t) + (\lambda+1)\, f_\lambda(t) = \sin t, \\ tg'_\lambda(t) + (\lambda+1)\, g_\lambda(t) = \cos t. \end{cases}$$

L'existence des dérivées de tous ordres de f_λ *et* g_λ *en résulte; comment les dérivées d'ordre* n, $f_\lambda^{(n)}$ *et* $g_\lambda^{(n)}$, *s'expriment-elles au moyen de* $f_{\lambda+n}$ *et* $g_{\lambda+n}$?

3° *Démontrer que* $f_\lambda(t)$ *et* $g_\lambda(t)$ *sont développables en série entière en* t, *quel que soit* t; *déterminer ces développements.*

II. — *On propose maintenant d'étudier plus particulièrement la fonction* $f_{\frac{1}{2}}$ *correspondant à* $\lambda = \frac{1}{2}$. *Pour simplifier les notations, cette fonction sera désormais désignée par* f (sans indice), *et ses dérivées seront notées* f', f'', ...

On suppose, dans toute la suite, t *positif ou nul :* $t \geqslant 0$.

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé dont les axes sont Ot, Oy, *on appelle* C *la courbe définie par l'équation* $y = f(t)$.

Les résultats établis dans la partie I (1° *et* 2°), *appliqués à la fonction* f, *s'expriment par les relations suivantes pour* $t > 0$:

$$f(t) = \frac{1-\cos t}{t} - \frac{1}{t\sqrt{t}}\int_0^t \frac{1-\cos u}{2\sqrt{u}}\, du = \frac{1}{t\sqrt{t}}\int_0^t \sqrt{u}\sin u\, du = \int_0^1 \sqrt{v}\sin(vt)\, dv$$

avec

$$f(0) = 0;$$

et

$$tf'(t) + \frac{3}{2} f(t) = \sin t.$$

1° *On sait que* $f(t)$ *est développable en série entière en* t; *quel est ce développement?*

2° *Démontrer que, quel que soit* $t > 0$, $f(t)$ *est strictement compris entre*

$$-\frac{1+\cos t}{t} \quad \text{et} \quad \frac{1-\cos t}{t}.$$

Quelles sont les limites de $f(t)$ *et de ses dérivées* $f'(t)$, ..., *lorsque* t *tend vers* $+\infty$?

Quel est le signe de $f(n\pi)$ *suivant la parité de l'entier positif* n? *Quel est celui de* $f'(n\pi)$?

3° *On considère la fonction* φ *définie, pour* $t \geqslant 0$, *par la condition :*

$$\varphi(t) = t^{\frac{3}{2}} f(t) = \int_0^t \sqrt{u} \sin u \, du.$$

Démontrer, quel que soit l'entier p, *positif ou nul, les relations :*

$$\varphi\left(p\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \varphi(p\pi) = (-1)^p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{p\pi + u} \sin u \, du,$$

$$\varphi[(p+1)\pi] - \varphi\left[p\pi + \frac{\pi}{2}\right] = (-1)^p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(p+1)\pi - u} \sin u \, du.$$

Le nombre $\varphi\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, *où* n *est un entier positif, peut alors se mettre sous la forme*

$$\varphi\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} S_n(u) \sin u \, du,$$

où $S_n(u)$ *est une somme que l'on déterminera.*

Quel est le signe de $\varphi\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$?

(On pourra étudier d'abord les cas $n = 1, n = 2, n = 3$.)

4° *Démontrer que dans chaque intervalle* $[n\pi, (n+1)\pi]$, n *étant un entier positif ou nul, l'équation* $f(t) = 0$ *a une racine et une seule, soit* t_n *(avec* $t_0 = 0$) *et l'équation* $f'(t) = 0$ *a également une racine et une seule, soit* θ_n.

Classer, dans l'ordre des grandeurs croissantes, suivante la parité de n, *les nombres* $n\pi$, $n\pi + \frac{\pi}{2}$, $(n+1)\pi$, t_n *et* θ_n.

Montrer que $f(\theta_n)$ *s'exprime simplement en fonction de* θ_n. *Quelle est la limite de* $(n+1)\pi - \theta_n$ *lorsque l'entier* n *tend vers* $+\infty$?

5° *Calculer une valeur approchée à 0,01 près de chacun des nombres* $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ *et* $f(\pi)$.

6° *On désigne par* Γ, Γ_1 et Γ_2 *les courbes ayant respectivement pour équations, relativement au repère orthonormé* (Ot, Oy) :

$$y = \frac{2}{3} \sin t, \qquad y = \frac{1 - \cos t}{t}, \qquad y = -\frac{1 + \cos t}{t}.$$

On demande :

d'une part, de construire, sur papier millimétré, avec la précision permise par les résultats qui viennent d'être obtenus, l'arc de la courbe C *correspondant à* $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

d'autre part, d'indiquer, soit sur papier millimétré, soit sur papier ordinaire ou quadrillé, la forme de l'arc de C *dans un intervalle tel que* $[2n\pi, 2(n+1)\pi]$ *et la forme générale de la courbe* C *pour* $t \geqslant 0$, *en situant* C *par rapport aux courbes* Γ, Γ_1, Γ_2.

7° *On désigne par* F *la fonction primitive de la fonction* f, *telle que* $F(0) = 0$. *Montrer que* F *peut s'exprimer simplement à l'aide de l'une des fonctions* g_λ *définies dans la partie* I. *Montrer que l'on a toujours* $F(t) \geqslant 0$ *Quelle est la limite de* $F(t)$ *quand* t *tend vers* $+\infty$?

1° Si $a > 0$, on a :

$$\int_0^a \left(\frac{u}{a}\right)^\lambda f_0(u) \, du = \frac{1}{a^\lambda} \int_0^a u^{\lambda-1}(1 - \cos u) \, du.$$

Quand $u \to 0$, $u^{\lambda-1}(1 - \cos u) \sim \frac{u^{\lambda+1}}{2} \to 0$, pour $\lambda + 1 > 0$; $F(u)$ définie par $F(u) = \left(\frac{u}{a}\right)^\lambda f_0(u)$ pour $u > 0$ et $F(0) = 0$ est définie et continue pour $0 \leqslant u \leqslant a$ et $\int_0^a \left(\frac{u}{a}\right)^\lambda f_0(u) \, du = \int_0^a F(u) \, du$ existe.

$\int_0^a \left(\frac{u}{a}\right)^\lambda g_0(u) \, du = \frac{1}{a^\lambda} \int_0^a u^{\lambda-1} \sin u \, du$; quand $u \to 0$, $u^{\lambda-1} \sin u \sim u^\lambda$ augmente indéfiniment si $0 > \lambda > -1$ mais est d'ordre inférieur à 1 par rapport à $\frac{1}{u}$, donc l'intégrale

$$\int_0^a \left(\frac{u}{a}\right)^\lambda g_0(u) \, du \quad \text{a un sens pour} \quad \lambda + 1 > 0.$$

72e Année. Août-Septembre 1961. N° 1-2.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES
(Fondée en 1890.)

Agrégation 1961 (Epreuves obligatoires, options et épreuves féminines)

Sujets donnés aux concours des Agrégations et aux concours d'entrée aux grandes Écoles en 1961.

PREMIÈRE PARTIE

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques élémentaires et *Mathématiques spéciales.*

NOTE PRÉLIMINAIRE.

Hormis les questions posées dans le dernier paragraphe de chacune des deuxième et troisième parties du problème, les trois parties peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Toutes les formes de solutions sont admises, qu'elles soient « géométriques », ou « analytiques », ou « mixtes », c'est-à-dire faisant appel à la fois à la géométrie et à la géométrie analytique.

Dans l'appréciation des compositions, il sera tenu compte de la présentation des raisonnements et de la précision avec laquelle les résultats trouvés, lorsqu'il s'agit de lieux géométriques ou d'enveloppes, seront situés par rapport aux données.

5447. — PREMIÈRE PARTIE (Géométrie plane). — 1° On considère une parabole ayant pour foyer F et pour directrice Δ.

Soient A et B deux points, P et Q leurs projections orthogonales sur Δ. Démontrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

— les points A et B sont conjugués par rapport à la parabole;

— les points P et Q (distincts ou non) sont les points communs à la directrice Δ et au cercle, passant par F, ayant pour centre le milieu du segment AB.

Soient A, B, C les sommets d'un triangle et A′, B′, C′, respectivement, les milieux des segments BC, CA, AB. Démontrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

— le triangle ABC est conjugué par rapport à la parabole;

— les trois droites B′C′, C′A′, A′B′ sont tangentes à la parabole.

Cette dernière condition étant supposée vérifiée, on mène par le foyer F les droites FA″, FB″, FC″ respectivement parallèles à B′C′, C′A′, A′B′. Démontrer que les trois couples de droites (FA′, FA″), (FB′, FB″), (FC′, FC″) ont les mêmes bissectrices.

2° *(Cette question peut être traitée indépendamment de la précédente.)*

On donne un point F, une droite D ne passant pas par F et un point A sur D. On désigne par φ toute parabole ayant F pour foyer et telle que celui de ses diamètres qui passe par A soit conjugué de la direction de D; démontrer qu'il existe une infinité de paraboles φ et indiquer une construction de l'une quelconque d'entre elles.

Déterminer l'enveloppe des directrices des paraboles φ.

Déterminer le lieu géométrique des pôles de la droite D par rapport aux paraboles φ.

3° On donne maintenant trois points F, A, B, non alignés. On désigne par θ toute parabole ayant F pour foyer et admettant les points A et B comme points conjugués; démontrer qu'il existe une infinité de paraboles θ et indiquer une construction de l'une quelconque d'entre elles.

Déterminer l'enveloppe des directrices des paraboles θ.

Déterminer le lieu géométrique des pôles de la droite AB par rapport aux paraboles θ.

Deuxième partie (Géométrie plane). — 1° On considère un cercle ω et un point F sur ce cercle. Soient a, b, c trois droites, ne passant pas par F, supports des côtés d'un triangle dont les sommets sont α (sur b et c), β (sur c et a), γ (sur a et b), et soient a', b', c' les polaires du point F respectivement par rapport aux couples de droites (b, c), (c, a), (a, b). On désigne par α', β', γ' respectivement les points d'intersection de b' et c', de c' et a', de a' et b'.

Démontrer qu'il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes :

— le triangle dont les côtés sont portés par les droites a, b, c est conjugué par rapport au cercle ω;

— les points α', β', γ' sont sur le cercle ω.

Cette condition étant supposée vérifiée, démontrer que le cercle passant par les points α', β, γ passe par le point F_1 symétrique de F par rapport à la droite a, et que les trois droites a, b', c' sont tangentes à une parabole ayant F_1 pour foyer.

Démontrer, dans les mêmes conditions, que la droite c se déduit de la droite b' par une homologie ayant pour centre F, pour base la droite a et pour rapport un nombre k, que l'on déterminera. [On rappelle que l'homologie plane ayant pour centre F, pour base a et pour rapport k, est la transformation ponctuelle qui, au point m différent de F, fait correspondre le point m' de la droite Fm tel que le birapport (F, μ, m', m) soit égal à k, μ étant le point d'intersection de Fm et de a.]

2° On donne deux droites a, b, non perpendiculaires, se coupant au point γ, et un point F hors de ces droites. On désigne par σ tout cercle passant par F, qui admet a et b comme droites conjuguées; démontrer qu'il existe une infinité de cercles σ et indiquer une construction de l'un quelconque d'entre eux.

On appelle c la polaire du point γ par rapport à un cercle σ et b' la polaire de F par rapport au couple de droites (a, c). Déterminer l'enveloppe des droites b' ainsi que l'enveloppe des droites c correspondant à tous les cercles σ. Montrer que l'homologie précédemment définie permet de construire simplement les branches infinies de l'enveloppe des droites c.

3° Quel est le lieu des centres des cercles σ?

4° Montrer qu'une transformation par polaires réciproques par rapport à un cercle convenablement choisi permet d'établir une relation entre certaines des questions étudiées dans la première partie et certaines des questions étudiées dans la deuxième partie.

Troisième partie. — *Les notations sont indépendantes de celles des parties précédentes.*

L'espace projectif complexe à trois dimensions est rapporté à un tétraèdre de référence ayant pour sommets les quatre points O, O′, I, J; les équations des plans (O, O′, I), (O, O′, J), (O, I, J), (O′, I, J) sont respectivement :

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0, \qquad T = 0.$$

1° On désigne par S une quadrique propre, tangente en O au plan (O, I, J), tangente en O′ au plan (O′, I, J) et *n'admettant pas* les plans (O, O′, I) et (O, O′, J) comme plans conjugués. Montrer que l'équation de S peut être mise sous la forme

$$AX^2 + A'Y^2 + 2BXY + 2CZT = 0,$$

les coefficients A, A′, B, C vérifiant certaines conditions, que l'on précisera.

Dans toute la suite la quadrique S est fixée.

2° On appelle Π un plan défini par l'équation

$$uX + vY + wZ + hT = 0,$$

ayant avec la droite OO′ un seul point commun γ, distinct de O et de O′ soient a, b les intersections de Π avec les plans (O, O′, I), (O, O′, J) et σ l'intersection de Π avec la quadrique S. Montrer que la condition que doivent vérifier u, v, w, h pour que les droites a et b soient conjuguées par rapport à σ est

$$Cuv + 2Bwh = 0.$$

Cette condition peut être interprétée comme l'équation tangentielle d'une quadrique propre R, dont on formera l'équation ponctuelle et que l'on situera par rapport au tétraèdre de référence.

3° On considère désormais l'ensemble des plans Π tels que les droites a et b soient conjuguées par rapport à σ et passent, de plus, par un point fixe $F(X_0, Y_0, Z_0, T_0)$ qui n'est situé ni sur la quadrique R, ni dans les plans Z = 0, T = 0. A chacun de ces plans Π on associe :

d'une part, la polaire c par rapport à σ de l'intersection γ de Π et de la droite OO′, ainsi que le plan (O, c) défini par le point O et la droite c;

d'autre part, le pôle λ par rapport à σ de l'intersection L de Π et du plan (O, I, J), ainsi que la droite Oλ.

Déterminer l'enveloppe E des plans (O, c). Déterminer le cône Λ, lieu géométrique des droites $O\lambda$.

4° On suppose maintenant que le point $F(X_0, Y_0, Z_0, T_0)$ est sur la quadrique S. On considère la transformation par perspective ayant pour centre le point O et pour plan de projection un plan donné Ω ne passant pas par O. A chacun des plans Π qui viennent d'être étudiés (paragraphe 3°), on associe la transformée σ_1 par cette perspective de la conique σ intersection de S et de Π.

Montrer que, dans le plan Ω, les coniques σ_1 passent par trois points fixes et admettent deux droites fixes comme droites conjuguées. Que représentent, pour l'ensemble des coniques σ_1, les traces sur le plan Ω des cônes E et Λ définis au paragraphe 3°?

5° Peut-on rattacher à l'étude précédente certains résultats concernant la famille de cercles étudiée dans la deuxième partie du problème, en considérant, par exemple, les cercles de cette famille comme projections orthogonales d'ellipses tracées sur un paraboloïde de révolution?

(*Durée : 6 h.*)

Analyse.

5448. — Avertissement. — La partie IV est indépendante des précédentes. Les parties I, II, III sont également indépendantes dans une large mesure, sauf en ce qui concerne les notations et certains résultats; mais ces résultats sont indiqués dans le texte. On conseille donc de lire attentivement tout le sujet, puis de chercher la solution sans inquiétude pour la suite au cas où une difficulté se présenterait dans une question.

La terminologie est celle du programme. On rappelle seulement qu'une *application* φ d'un ensemble E dans un ensemble F, notée $\varphi: x \rightarrow y$, doit être comprise comme une correspondance qui associe à tout élément x de E un élément bien déterminé $y = \varphi(x)$ de F appelé image de x par φ.

I. — 1° *a*) Montrer que les polynômes

$$E_k = x^k(1-x)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

forment une base de l'espace vectoriel P_n défini sur le corps R des nombres réels par les polynômes à une indéterminée x, à coefficients réels, de degré au plus égal à n.

b) Former la matrice qui permet d'exprimer la base $\{E_k\}$ en fonction de la base $\{e_p\}$ définie par

$$e_p = x^p, \qquad p = 0, 1, 2, \dots, n,$$

ainsi que la matrice inverse. Expliciter le cas $n = 3$.

2° Soit $R[x]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée x et à coefficients réels. A tout polynôme

$$P(x) \in R[x],$$

on associe le polynôme $B_n(P)$ défini par

$$(1) \qquad B_n(P) = \sum_{k=0}^{k=n} P\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

où

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

a) Calculer $B_n(P)$ pour $P \equiv 1$, $P \equiv x$. Vérifier la formule

$$(2) \qquad B_n(xP) = \frac{x(1-x)}{n}\frac{dB_n(P)}{dx} + xB_n(P).$$

En déduire $B_n(P)$ pour $P \equiv x^2$. Démontrer la relation

$$(3) \qquad \sum_{k=0}^{k=n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$

b) Démontrer que l'application $B_n: P \rightarrow B_n(P)$, est une application linéaire de l'espace vectoriel $R[x]$ dans l'espace vectoriel P_n défini au 1°, *a*). Vérifier que la restriction de l'application B_n à l'espace vectoriel P_d des polynômes de degré au plus égal à d est une application linéaire de P_d sur lui-même si $d \leqslant n$, et de P_d sur P_n si $d > n$.

II. — Soit $\mathfrak{C}$ l'espace topologique des fonctions réelles $f(x)$ définies et continues sur le segment $[0, 1]$, $\mathfrak{C}$ étant considéré comme un espace vectoriel sur R, normé par

$$\|f\| = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

A toute fonction $f \in \mathfrak{C}$, on fait correspondre le polynôme

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \tag{4}$$

1° On se propose d'étudier la limite du polynôme $B_n(f)$ lorsque n augmente indéfiniment.

a) Déduire de la relation (3) la majoration suivante :

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \geqslant \alpha} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4\alpha^2 n},$$

la somme du premier membre étant prise pour les valeurs de k extraites de $0, 1, 2, \ldots, n$ telles que $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \alpha$ où α est un nombre positif donné et x fixé sur $[0, 1]$.

b) Démontrer que la suite de polynômes $B_n(f)$ converge dans l'espace $\mathfrak{C}$ vers la fonction f quand n augmente indéfiniment, autrement dit que la suite de polynômes $B_n(f)$ converge uniformément vers la fonction $f(x)$ sur le segment $[0, 1]$.

2° n étant fixé, soit B_n l'application $f \to B_n(f)$ de $\mathfrak{C}$ dans lui-même définie par la relation (4).

a) Montrer qu'il existe un nombre positif ρ, indépendant de f, tel que

$$\|B_n(f)\| \leqslant \rho \|f\|.$$

En déduire que l'application B_n est uniformément continue.

b) Soit $\varphi(f)$ le point de l'espace euclidien R^{n+1} ayant pour coordonnées $a_k = f\left(\frac{k}{n}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Montrer que l'application φ est continue. (On prend comme norme dans R^{n+1} l'expression $\text{Max.}\,|a_k|$, $k = 0, 1, \ldots, n$.)

Vérifier que la donnée de $\varphi(f)$ détermine $B_n(f)$ et que l'application ψ ainsi définie est une application biunivoque et continue de R^{n+1} sur l'espace P_n considéré comme sous-espace topologique de $\mathfrak{C}$.

c) Montrer que les images par ψ des points de R^{n+1} qui vérifient $\text{Max}\,|a_k| = 1$, $k = 0, 1, \ldots, n$, forment un sous-ensemble compact de P_n.

L'application ψ est-elle un homéomorphisme de R^{n+1} sur P_n?

III. — On étudie dans cette partie les fonctions $f(x)$ réelles, continues et à variation bornée sur le segment $[0, 1]$.

1° Établir la relation

$$\frac{dB_n(f)}{dx} = n \sum_{k=0}^{k=n-1} \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-1-k}. \tag{5}$$

Montrer que, si $f(x)$ est monotone non décroissante sur $[0, 1]$, il en est de même de $B_n(f)$.

2° Démontrer qu'une fonction $f(x)$ continue et à variation bornée sur le segment $[0, 1]$ peut être *caractérisée* par la propriété suivante : elle est la limite quand $n \to \infty$, uniformément sur le segment $[0, 1]$, de la différence de deux polynômes de degré inférieur ou égal à n, monotones non décroissants sur $[0, 1]$.

3° Soit V la variation totale de $f(x)$ sur $[0, 1]$. Soit V_n la variation totale de $B_n(f)$ sur $[0, 1]$. Démontrer la relation

$$V_n \leqslant V.$$

(Pour obtenir cette majoration de V_n, on pourra prendre V_n sous la forme

$$V_n = \int_0^1 \left|\frac{dB_n(f)}{dx}\right| dx.)$$

Démontrer que, $f(x)$ étant fixée, on a

$$\lim_{n \to \infty} V_n = V.$$

IV. — Soit λ un nombre réel tel que $0 < \lambda \leqslant 1$. Si s_n est le terme général d'une suite de nombres réels, on pose

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{k=n} p_{nk}(\lambda) s_k, \qquad \text{avec} \qquad p_{nk}(\lambda) = C_n^k \lambda^k (1-\lambda)^{n-k}. \tag{6}$$

On définit ainsi une application φ_λ qui fait correspondre à la suite (s_n) la suite $(\sigma_n) = \varphi_\lambda(s_n)$.

1° Démontrer que, si la suite (s_n) converge vers s quand $n \to \infty$, la suite (σ_n) converge vers la mêm limite. (On pourra démontrer d'abord que, si k est fixé, on a

$$\lim_{n\to\infty} p_{nk}(\lambda) = 0.)$$

Donner un exemple de suite (s_n) non convergente dont la suite transformée $(\sigma_n) = \varphi_\lambda(s_n)$ soit convergente

2° Soit $f(x)$ la somme de la série entière

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} s_k x^{k+1}$$

supposée convergente, avec un rayon R tel que $0 < \mathrm{R} < \dfrac{\lambda}{1-\lambda}$. On pose

$$x = \frac{\lambda y}{1-(1-\lambda)y}.$$

Démontrer la relation

$$(7) \qquad \sum_{k=0}^{k=\infty} s_k x^{k+1} = \lambda \sum_{n=0}^{n=\infty} \sigma_n y^{n+1},$$

valable pour

$$|y| < \frac{\mathrm{R}}{\lambda + (1-\lambda)\mathrm{R}}.$$

3° Démontrer que, lorsque λ varie, l'ensemble des applications φ_λ forme, pour la composition des appli cations, un groupe isomorphe au groupe multiplicatif des nombres réels λ tels que $0 < \lambda \leqslant 1$.

En déduire que, si la suite $(\sigma_n) = \varphi_\lambda(s_n)$ converge vers s, la suite $(\sigma'_n) = \varphi_{\lambda'}(s_n)$ converge également vers pour $\lambda' \leqslant \lambda$.

(*Durée : 6 h.*)

Mathématiques appliquées.

5449. — Note préliminaire. — *La partie I du problème n'a d'autre objet que de donner une définition e de mettre en évidence quelques propriétés de deux familles de fonctions dépendant d'un paramètre réel λ, les résultat à établir étant d'ailleurs explicitement indiqués dans l'énoncé. Il est recommandé de ne pas s'attarder trop longuemen sur ces questions, afin de réserver un temps suffisant à l'étude de la fonction particulière proposée dans la partie II.*

Problème. — On désigne par t une variable réelle, par f_0 et g_0 les deux fonctions définies par les conditions

pour $t \neq 0$,
$$f_0(t) = \frac{1-\cos t}{t} \quad \text{et} \quad g_0(t) = \frac{\sin t}{t},$$
avec
$$f_0(0) = 0, \qquad g_0(0) = 1.$$

I. — Soit λ une constante réelle donnée, strictement supérieure à (-1) :

$$\lambda + 1 > 0.$$

1° Indiquer très brièvement pourquoi la condition imposée à λ entraîne l'existence (ou la convergence) des deux intégrales :

$$\int_0^a \left(\frac{u}{a}\right)^\lambda f_0(u)\,du, \qquad \int_0^a \left(\frac{u}{a}\right)^\lambda g_0(u)\,du,$$

a étant un nombre réel non nul.

On considère alors les deux fonctions f_λ et g_λ définies, pour $t \neq 0$, par les relations

$$f_\lambda(t) = f_0(t) - \frac{\lambda}{t}\int_0^t \left(\frac{u}{t}\right)^\lambda f_0(u)\,du,$$
$$g_\lambda(t) = g_0(t) - \frac{\lambda}{t}\int_0^t \left(\frac{u}{t}\right)^\lambda g_0(u)\,du.$$

Démontrer que f_λ est une fonction impaire, que g_λ est une fonction paire et que l'on a, pour $t > 0$,

$$f_\lambda(t) = \frac{1-\cos t}{t} - \frac{1}{t^{\lambda+1}}\int_0^t \lambda u^{\lambda-1}(1-\cos u)\,du = \frac{1}{t^{\lambda+1}}\int_0^t u^\lambda \sin u\,du = \int_0^1 v^\lambda \sin(vt)\,dv,$$
$$g_\lambda(t) = \frac{\sin t}{t} - \frac{1}{t^{\lambda+1}}\int_0^t \lambda u^{\lambda-1}\sin u\,du = \frac{1}{t^{\lambda+1}}\int_0^t u^\lambda \cos u\,du = \int_0^1 v^\lambda \cos(vt)\,dv.$$

73e Année. Août-Septembre 1962. N° 1-2.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES
(Fondée en 1890.)

Agrégation 1962, 1ère comp. (Mathématiques Générales)

Sujets donnés aux concours des Agrégations et aux concours d'entrée aux grandes Écoles en 1962.

PREMIÈRE PARTIE

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques élémentaires et *Mathématiques spéciales.*

N.B. — *Les deux problèmes constituant cette composition sont complètement indépendants l'un de l'autre.*

Premier problème. — **5513.** — (Toutes les formes de solutions sont admises, qu'elles soient « géométriques », ou « analytiques », ou « mixtes », c'est-à-dire faisant appel à la fois à la géométrie et à la géométrie analytique.)

Les données fixes sont : Π, un point O du plan Π, un point A, distinct de O, sur la normale en O au plan Π. On pose $OA = h$.

On appelle :

V tout plan tel que la projection orthogonale H du point A sur ce plan soit un point du plan Π;

D toute droite telle que la projection orthogonale M du point A sur cette droite soit un point du plan Π.

I. Les plans V dépendent de deux paramètres; quelle est leur enveloppe?

Quelle est l'enveloppe des plans V parallèles à une direction de droite donnée, L, et quel est le lieu des points H correspondants à ces plans?

Quelle est l'enveloppe des plans V passant par un point donné, P, et quel est le lieu des points H correspondant à ces plans? Discuter suivant la position du point P.

II. Déterminer l'enveloppe des droites D situées dans un plan donné W non parallèle à Π.

Quel est l'ensemble des droites D parallèles à une direction de droite donnée L?

Déterminer le lieu des droites D passant par un point donné P; discuter suivant la position du point P.

(Les deux parties suivantes III et IV peuvent être traitées dans un ordre quelconque.)

III. On donne un plan W, non parallèle à Π, et, dans le plan Π, une droite Δ non parallèle à W.

Démontrer qu'il existe en général un paraboloïde hyperbolique contenant la droite Δ, admettant W comme plan directeur, les génératrices rectilignes parallèles à W étant des droites D.

IV. On donne dans le plan Π un cercle Γ ayant pour centre Ω et pour rayon R; on pose $O\Omega = a$. On appelle (γ) l'ensemble des droites D qui rencontrent le cercle Γ.

1° On donne, de plus, un point P. Discuter suivant la position du point P le nombre et la réalité des droites de (γ) qui passent par P.

2° On suppose $a \neq R$. Déterminer les quadriques dont un système de génératrices rectilignes ne comprend que des droites de (γ). Il existe une infinité de telles quadriques; déterminer leur enveloppe.

Deuxième problème. — **5514.** — On sait que tout rationnel peut être représenté d'une manière unique par une fraction irréductible de dénominateur positif, 0 (zéro) étant représenté par $\frac{0}{1}$ et 1 par $\frac{1}{1}$. On désignera dans la suite par (R_1) l'ensemble des réels de l'intervalle fermé $[0,1]$, par (Q_1) l'ensemble des rationnels du même intervalle et par (F) l'ensemble des fractions irréductibles représentant les éléments de (Q_1). La relation $\frac{P}{Q} \in (F)$ signifie donc que P et Q sont deux entiers premiers entre eux (lorsque $P \neq 0$), Q étant strictement positif, et $0 \leqslant P \leqslant Q$.

I. 1° Soient p, q, p', q' quatre entiers positifs ou nuls vérifiant les conditions

$$p'q - pq' = 1, \qquad p' \leqslant q'$$

qui entraînent, en particulier $p' \cdot q \cdot q' \neq 0$.

Démontrer que $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$ sont deux éléments de (F) vérifiant $\frac{p}{q} < \frac{p'}{q'}$.

Démontrer que la fraction $\frac{p+p'}{q+q'}$ est aussi un élément de (F) et vérifie $\frac{p}{q} < \frac{p+p'}{q+q'} < \frac{p'}{q'}$. Que peut-on dire des fractions $\frac{p+\lambda p'}{q+\lambda q'}$ et $\frac{\lambda p+p'}{\lambda q+q'}$, λ étant un entier positif arbitraire?

Démontrer que $q > q'$ entraîne $p \geqslant p'$ et que $q < q'$ entraîne $p < p'$.

Que peut-on dire de la fraction $\frac{p-p'}{q-q'}$ (dans l'hypothèse $q > q'$) et de la fraction $\frac{p'-p}{q-q'}$ (dans l'hypothèse $q < q'$)?

2° Soit $\frac{P}{Q}$ une fraction irréductible, élément de (F), autre que $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{1}$. Démontrer qu'il existe un couple unique $\left(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}\right)$ d'éléments de (F) tel que

$$p + p' = P, \qquad q + q' = Q, \qquad p'q - pq' = 1.$$

Application numérique : Calculer les fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$ lorsque $\frac{P}{Q} = \frac{5}{13}$.

II. Soit S_0 l'ensemble *ordonné* constitué par les fractions $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{1}$ rangées dans cet ordre :

$$S_0 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}.$$

Au couple formé par ces fractions on associe la fraction $\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$ et l'on construit un deuxième ensemble *ordonné* S_1 en gardant les deux éléments de S_0, sans modifier leur ordre relatif, et en intercalant entre eux la fraction qui vient de leur être associée :

$$S_1 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\}.$$

Aux couples $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right)$ formés par deux éléments *consécutifs* de S_1 on associe respectivement les fractions $\frac{0+1}{1+2} = \frac{1}{3}$ et $\frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3}$; puis on construit un troisième ensemble *ordonné* S_2 en gardant les éléments de S_1, sans modifier leur ordre relatif, et en intercalant entre les éléments de chacun des couples d'éléments consécutifs de S_1 la fraction associée à ce couple :

$$S_2 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\}.$$

On continue ainsi de proche en proche : d'une façon générale, ayant obtenu, comme il vient d'être expliqué pour S_1 et S_2, un ensemble *ordonné* de fractions, soit S_k, on associe à chacun des couples $\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}\right)$ formé par deux fractions *consécutives* de S_k la fraction $\frac{(a+a')}{(b+b')}$ et l'on construit un nouvel ensemble *ordonné* S_{k+1} en gardant les éléments de S_k, sans modifier leur ordre relatif, et en intercalant entre les deux éléments de chacun des couples d'éléments consécutifs de S_k la fraction associée à ce couple. On a donc

$$S_3 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right\}$$

et ainsi de suite.

On définit par ce procédé une suite infinie $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_k, S_{k+1}, \ldots$ d'ensembles *ordonnés* dont les éléments sont des fractions.

1° Quel est le nombre d'éléments de S_k?

2° Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ deux fractions *consécutives* de l'un quelconque des ensembles S_k. Démontrer que les entiers positifs ou nuls a, b, a', b' (tels qu'ils ont été obtenus par les opérations qui viennent d'être décrites) vérifient les conditions

$$a'b - ab' = 1, \qquad a' \leqslant b'.$$

Chaque ensemble S_k est donc un sous-ensemble de (F), comprenant un nombre fini d'éléments de (F) rangés dans l'ordre croissant.

3° On considère deux éléments de (F), $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$, tels que

$$p'q - pq' = 1.$$

Démontrer qu'il existe un sous-ensemble S_k et un seul admettant les deux fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$, rangées dans cet ordre, comme éléments consécutifs, et que toute fraction $\frac{P}{Q}$ de (F) est un élément d'une infinité de sous-ensembles S_k.

Application numérique: Les fractions $\frac{5}{13}$ et $\frac{77}{200}$ sont deux éléments *consécutifs* d'un sous-ensemble S_h. Quelle est la valeur de h? Quelle est la plus petite valeur de k telle que la fraction $\frac{5}{13}$ soit élément de S_k? Même question pour la fraction $\frac{77}{200}$.

III. 1° Démontrer que l'on peut définir sur l'ensemble (F) une fonction à valeurs réelles, et une seule, soit φ, vérifiant les conditions suivantes:

Quelles que soient les deux fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$ de (F) telles que $p'q - pq' = 1$

$$2\varphi\left(\frac{p+p'}{q+q'}\right) = \varphi\left(\frac{p}{q}\right) + \varphi\left(\frac{p'}{q'}\right), \quad \text{et} \quad \varphi\left(\frac{0}{1}\right) = 0, \quad \varphi\left(\frac{1}{1}\right) = 1.$$

Calculer, à titre d'exemple, $\varphi\left(\frac{5}{13}\right)$.

Étudier les valeurs de φ correspondant aux fractions de (F) qui constituent un sous-ensemble S_k. Que peut-on dire de la différence

$$\varphi\left(\frac{p'}{q'}\right) - \varphi\left(\frac{p}{q}\right),$$

lorsque $\frac{p'}{q'}$ et $\frac{p}{q}$ sont deux fractions de (F) telles que $p'q - pq' = 1$?

2° La fonction φ ainsi définie sur (F) est également définie sur (Q_1) en convenant de poser

$$\varphi(r) = \varphi\left(\frac{p}{q}\right),$$

$\frac{p}{q}$ étant la fraction de (F) qui représente le rationnel r de (Q_1). Démontrer que l'on peut définir sur l'ensemble (R_1) des réels de l'intervalle [0,1] une fonction et une seule, Φ, à valeurs réelles, croissante, continue, et coïncidant avec φ sur l'ensemble (Q_1).

3° On rappelle que la solution générale de la relation de récurrence

$$u_n = \alpha u_{n-1} + \beta u_{n-2}, \tag{1}$$

où α et β sont deux constantes telles que l'équation $x^2 - ax - \beta = 0$ ait deux racines distinctes ρ et ρ' peut être mise sous la forme

$$u_n = A\rho^n + B\rho'^n,$$

A et B étant deux constantes arbitraires (*on ne demande pas de démontrer ce résultat*).

Soient alors P_n et Q_n les solutions de la relation de récurrence:

$$u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}$$

définies respectivement par les conditions $P_1 = 1$, $P_2 = 2$ et $Q_1 = 2$, $Q_2 = 5$. Étudier la différence $P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n$; que peut-on dire des fractions $\frac{P_n}{Q_n}$, $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, $\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}$?

Démontrer que la suite ayant pour terme général

$$v_n = \varphi\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)$$

est solution d'une relation de récurrence de la forme (1); exprimer v_n en fonction de n.

Démontrer que $\frac{P_n}{Q_n}$ a une limite finie, l, quand n tend vers l'infini; calculer l et $\Phi(l)$.

Agrégation 1962, 2ème comp. (Analyse & probabilités)

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Concours de 1962.

5515. — I. — *On considère les deux équations en* z :

(1) $$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = 0,$$

(2) $$g(z) = z^n - |a_1| z^{n-1} - \cdots - |a_{n-1}| z - |a_n| = 0,$$

où les coefficients a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *sont réels ou complexes;* $|a_i|$ *désigne le module de* a_i. *On suppose* $a_1 \neq 0$, $a_n \neq 0$.

1° a) *Démontrer que l'équation* (2) *a une racine réelle positive et une seule, que l'on représentera par* r.

b) *Vérifier la relation*

(3) $$|f(z)| \geqslant g|z|.$$

En déduire que toutes les racines réelles ou complexes de l'équation (1) *ont un module inférieur ou égal à* r. *Montrer en outre que celles des racines réelles ou complexes de l'équation* (2) *qui sont différentes de* r *ont un module inférieur à* r.

2° *Démontrer les inégalités*

$$r < \operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,n} (1 + |a_i|) \qquad \text{et} \qquad r < \left(1 + \sum_{i=1}^{i=n} |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\left(\right.$*Pour cette dernière, on pourra appliquer l'inégalité de Schwartz à la somme* $\left.\sum_{i=1}^{i=n} |a_i|\,|z|^{n-i}.\right)$

3° *En appelant* r_1 *le module maximal des racines de l'équation* (1), *démontrer la relation*

$$r_1 \geqslant (2^{1/n} - 1)r.$$

[*On pourra partir des relations entre les coefficients et les racines de l'équation* (1).]
Que peut-on déduire des exemples

$$f(z) = (z + 1)^n, \qquad f(z) = 2z^n - (z + 1)^n ?$$

4° *Soit la matrice carrée d'ordre* n :

$$A = \begin{bmatrix} |a_1| & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ |a_2| & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ |a_{n-1}| & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ |a_n| & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Démontrer que cette matrice admet l'équation (2) *comme équation caractéristique. Vérifier que la matrice* A^{2n-2} *a tous ses termes positifs quels que soient les coefficients* a_i, *tels que* $a_1 \neq 0$, $a_n \neq 0$. (*On pourra commencer par le cas* $a_i = 0$ $[i \neq 1,\ i \neq n]$, $a_1 = a_n = 1$ *et étendre ensuite au cas général.)*

II. — 1° *Soit* $E = R^+$ *l'ensemble des nombres réels positifs* (*non nuls*). x *et* x' *étant des éléments de* E, *on pose*

$$h(x, x') = |\text{Log}\, x - \text{Log}\, x'|.$$

Démontrer que $h(x, x')$ *est une* distance *dans* E. *Vérifier que l'espace métrique* E *défini par la distance* h *est le même espace topologique que l'espace métrique* E *défini par la distance* $d(x, x') = |x - x'|$.

2° *On considère la transformation homographique* T *définie dans* E *par*

T : $$x \to y = \frac{c + dx}{a + bx} \quad (a, b, c, d \text{ éléments de } R^+).$$

a) *Vérifier que l'image* T(E) *de* E *par* T *est contenue dans un sous-espace compact de* E.

b) *Etablir la relation*

(4) $$\frac{h(y, y')}{h(x, x')} \leqslant \operatorname{th} \frac{\lambda}{4},$$

où y *et* y' *sont les images de* x *et* x' *par* $T(x \neq x')$ *et où* λ *désigne la distance*

$$\lambda = h\left(\frac{c}{a}, \frac{d}{b}\right).$$

c) $x_0 \in E$ *étant fixé, on se propose d'étudier la suite des transformés* $x_n = T^n(x_0)$ *de* x_0 *par* T. *Démontrer que la suite* $\{x_n\}$ *est une suite de Cauchy pour la distance* h.

d) *En déduire que la suite* $\{x_n\}$ *converge dans* E *vers un point limite,* l, *lorsque* n *augmente indéfiniment. Démontrer que* l *est un point invariant par* T $(T(l) = l)$ *et que c'est le seul point de* E *invariant par* T.

3° a) *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *une matrice* positive, *c'est-à-dire une matrice dont tous les éléments sont dans* R^+. *Une telle matrice sera notée* $A > 0$. *On lui associe l'application linéaire* P *de* R^2 *qui a pour matrice* A *dans la base* $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0,1)$, *ainsi que la transformation homographique* T *de* E *définie au* 2°.

Démontrer au moyen de T *qu'il existe un vecteur propre* (x_1, x_2) positif $(x_1 \in R^+, x_2 \in R^+)$ *de* P, *associé à une valeur propre positive* r. *Vérifier que la deuxième valeur propre de* P *a un module inférieur à* r.

b) *On dit qu'une matrice* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *est* primitive *si ses éléments* a, b, c, d *sont positifs* ou nuls $(A \geqslant 0)$ *et s'il existe un entier* m *tel que la matrice* A^m *soit positive* $(A^m > 0)$.

Démontrer la propriété suivante: pour qu'une matrice $A \geqslant 0$ *soit primitive, il faut et il suffit que*

(5) $$bc \neq 0, \qquad a + d \neq 0.$$

Étendre à une matrice primitive les résultats démontrés au 3°, a) *pour une matrice positive.*

III. — 1° *Soit* $E = (R^+)^n$ *l'ensemble des points* $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, *où* $x_i \in R^+$. *On pose de plus* $x_0 = 1$ *et, pour deux points* x, x' *éléments de* E :

$$h(x, x') = \operatorname*{Max}_{i,j=0,1,\dots,n} \left| \operatorname{Log} \frac{x_i}{x_j} - \operatorname{Log} \frac{x'_i}{x'_j} \right|.$$

Démontrer que $h(x, x')$ *est une distance dans* E *qui définit le même espace topologique que la distance euclidienne.*

Préciser pour cette distance la boule de centre x *et de rayon* R. *Représenter cette boule par une figure dans le cas du plan* $(n = 2)$.

2° *Indiquer les résultats qu'on pourrait obtenir par les méthodes qui généralisent celles de la partie* II *et comment ces résultats peuvent s'appliquer à la matrice* A *considérée à la question* I, 4°.

Solution.

par **P. L. Hennequin,** Maître de Conférences à la Faculté des sciences de Clermont-Ferrand.

I

1° a) Puisque $|a_n| \neq 0$, 0 n'est pas racine de (2) qui est équivalente à

(3) $$1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{z^k}.$$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{z^k}$ est pour $z > 0$ une fonction continue strictement décroissante de $+\infty$ à 0, qui prend donc la valeur 1 pour une et une seule valeur réelle positive r, racine simple de g, qui change une fois et une seule de signe sur $[0, +\infty[$ pour $z = r$.

Si $z \neq r$ on a donc

(4) $$g(|z|)\,(|z| - r) > 0.$$

76e Année — Août-Septembre 1965 — No 1-2

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(Fondée en 1890)

Agrégation 1965, 1ère comp. (Mathématiques Générales)

Sujets donnés aux concours des Agrégations et aux concours d'entrée aux grandes Écoles en 1965.

PREMIÈRE PARTIE

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques élémentaires et Mathématiques spéciales.

4 (5699.) — INDICATIONS PRÉLIMINAIRES. — 1o La partie II du problème est indépendante de la partie I. Il n'est pas nécessaire d'avoir traité les parties I et II pour commencer l'étude de la partie III.

2o L'espace projectif (resp. le plan projectif) dont il est question dans les parties I et IV (resp. dans la partie III) est supposé rapporté à un repère permettant de définir chaque point P par quatre (resp. trois) coordonnées *homogènes* x, y, z, t (resp. x, y, z); la matrice-colonne formée par un système de coordonnées du point P sera notée (P).

Les nombres intervenant dans le problème sont des nombres du corps des complexes.

I. — Soient a, b, c, a', b', c' six nombres liés par

$$1 + bcb'c' + cac'a' + aba'b' = 0.$$

On considère la matrice

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 0 & ba' & -ca' & bc \\ -ab' & 0 & cb' & ca \\ ac' & -bc' & 0 & ab \\ -b'c' & -c'a' & -a'b' & 0 \end{bmatrix}.$$

1o Démontrer que le carré M^2 est égal à la matrice-unité d'ordre quatre, que l'on ~~désignera par~~ Ω, et que les valeurs propres de M sont $+1$ et -1; quel est l'ordre de multiplicité de chacune d'elles?

2o On considère la transformation de l'espace projectif qui, à chaque point P, fait correspondre le point P' défini par

$$(\mathrm{P}') = \mathrm{M}.(\mathrm{P}).$$

Démontrer que cette transformation admet deux droites de points invariants. Quelles relations existe-t-il entre ces droites et les colonnes des matrices $\mathrm{M}+\Omega$ et $\mathrm{M}-\Omega$?

3o On donne trois nombres u, v, w, deux à deux différents, et l'on définit les nombres r, r', r'' par les conditions

$$r(w - v) + 1 - vw = 0,$$
$$r'(u - w) + 1 - wu = 0,$$
$$r''(v - u) + 1 - uv = 0.$$

Vérifier les relations

$$1 + r'r'' + r''r + rr' = 0,$$
$$1 + vwr'r'' + wur''r + uvrr' = 0.$$

On considère la matrice

$$\mathrm{R} = \begin{bmatrix} 0 & ur' & -ur'' & r'r'' \\ -vr & 0 & vr'' & r''r \\ wr & -wr' & 0 & rr' \\ -vw & -wu & -uv & 0 \end{bmatrix}.$$

Montrer que les colonnes de $R + \Omega$ représentent quatre points alignés du plan $x + y + z + t = 0$. Que peut-on dire des points représentés par les colonnes de $R - \Omega$?

II. — Dans un plan euclidien, on donne deux points réels et distincts J et J′. On appelle (σ) le faisceau linéaire des cercles passant par J et J′ et (τ) le faisceau des cercles orthogonaux aux cercles de (σ).

1° Sur un cercle τ_1 de (τ) on prend deux points réels A et B hors de la droite des centres et l'on considère les cercles de (σ) passant respectivement par A et B : soient σ_A, σ_B ces deux cercles, supposés distincts. La droite AB recoupe σ_A en C et σ_B en D. Démontrer que les points C et D sont sur un même cercle τ_2 de (τ).

2° En général, la droite ABCD coupe les axes radicaux des faisceaux (σ) et (τ) en des points à distance finie; montrer que l'un de ces points est un centre d'homothétie des cercles τ_1, τ_2 et que l'autre est un centre d'homothétie des cercles σ_A, σ_B.

(L'étude des cas particuliers n'est pas demandée.)

3° Démontrer que les couples de droites (BJ, BJ′) et (CJ, CJ′) ont mêmes directions de bissectrices.

Soit (φ) la famille des hyperboles équilatères admettant J et J′ comme points diamétralement opposés. Démontrer qu'il existe dans (φ) une hyperbole φ_1 passant par A et D et une hyperbole φ_2 passant par B et C.

III. — *Données :* Dans un plan projectif Π on donne quatre droites (E), (F), (G), (H), se coupant deux à deux en six points distincts I, J, K, I′, J′, K′, notés de telle sorte que :

I, J, K sont sur (E); I, J′, K′ sur (F); I′, J, K′ sur (G); I′, J′, K sur (H).

On désigne par (f), (g), (h) les faisceaux linéaires ponctuels de coniques admettant respectivement comme points de base : J, J′, K, K′ pour (f); K, K′, I, I′ pour (g); I, I′, J, J′ pour (h). Les coniques de ces faisceaux, dont il sera question dans la suite, sont des coniques non décomposées.

Notations : A partir de la question 2°, les quatre droites (E), (F), (G), (H) seront représentées respectivement par les équations

$$E = 0, \qquad F = 0, \qquad G = 0, \qquad H = 0,$$

E, F, G, H désignant quatre formes linéaires (de x, y, z) dépendantes, trois quelconques d'entre elles, par exemple F, G, H, étant indépendantes; on suppose que les coefficients des formes sont choisis de façon que la relation de dépendance s'exprime par l'identité

$$F + G + H + E = 0.$$

Tout point du plan Π peut être défini : soit par ses trois coordonnées (F, G, H), c'est-à-dire par les valeurs qu'il donne à ces formes; soit par ses quatre « coordonnées liées » (F, G, H, E), c'est-à-dire par les valeurs (de somme nulle) qu'il donne à ces quatre formes.

Les coniques de (f), (g), (h) seront représentées par les équations respectives

$$EF - \mu GH = 0, \qquad EG - \mu' HF = 0, \qquad EH - \mu'' FG = 0,$$

μ, μ', μ'' étant des paramètres.

Définition : On convient de dire que trois points *rangés* 1, 2, 3 forment un cycle, qui sera noté (1, 2, 3), lorsque ces points sont alignés et lorsqu'il existe : une conique de (h) passant par 1 et 2, une conique de (f) passant par 2 et 3, une conique de (g) passant par 3 et 1.

Pour établir l'existence de tels cycles et pour étudier quelques-unes de leurs propriétés, on considère une conique h_1 de (h) et, sur h_1, deux points A et B distincts (et distincts des points de base), puis les coniques f_A, f_B de (f) et g_A, g_B de (g) qui passent respectivement par A et B.

1° On suppose d'abord que les coniques f_A et f_B sont distinctes, ainsi que g_A et g_B.

Démontrer, en utilisant les trois involutions déterminées sur la droite AB par les coniques (dégénérées et non dégénérées) des trois faisceaux (f), (g), (h), que les coniques f_B et g_A ont en commun un point situé sur la droite AB; soit C ce point, qui définit un cycle (A, B, C).

Démontrer qu'il existe sur la droite ABC un quatrième point, D, permettant de définir trois autres cycles : (B, A, D), (C, D, A), (D, C, B).

Que deviennent ces résultats si f_A et f_B (ou bien g_A et g_B) sont confondues?

2° *(Cette question peut être traitée indépendamment de la solution de la question III, 1°.)*

Les notations u, v, w, r, r', r'' désignent six nombres non nuls, vérifiant les conditions énoncées dans la partie I, 3° et définissant une matrice R.

On définit la conique h_1 par l'équation $EH - w^2 GF = 0$ et les points A et B (distincts des points de base) comme intersections de h_1 avec les droites

$$\begin{aligned} Hv + Gw &= 0, \quad \text{pour A,} \\ Hu + Fw &= 0, \quad \text{pour B.} \end{aligned}$$

Calculer, au moyen de u, v, w, r, r', r'', les coordonnées liées (F, G, H, E) des points A et B; former les équations des coniques f_A, f_B, g_A, g_B.

Établir par le calcul l'existence sur la droite AB des points C et D définis dans l'énoncé de la question III, 1°; calculer les coordonnées liées (F, G, H, E) des points C et D et former l'équation de la conique de (h) qui passe par C et D.

On montrera que les colonnes de la matrice $R + \Omega$ représentent, à un facteur près, les coordonnées liées des points A, B, C, D.

Former, en fonction de u, v, w seuls, une équation de la droite ABCD.

3° On considère une conique de (f), une conique de (g), une conique de (h), définies par leurs équations respectives :

$$\begin{aligned} EF - u^2GH &= 0, \\ EG - v^2HF &= 0, \\ EH - w^2FG &= 0, \end{aligned}$$

où u^2, v^2, w^2 sont deux à deux distincts.

Les trois coniques, prises deux à deux, se coupent, en général, en six points autres que les points de base.

Étudier la disposition de ces six points en mettant en évidence les cycles qu'ils peuvent former, ainsi que les matrices R qu'on peut leur associer.

4° Quelle relation existe-t-il entre les parties II et III du problème?

IV. — Dans l'espace projectif contenant le plan Π (de la partie III), on donne un tétraèdre dont aucun des sommets O_1, O_2, O_3, O_4 n'est situé dans Π. Désignant par Q_i le plan de la face du tétraèdre opposée au sommet O_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, on appelle (F), (G), (H), (E) les droites d'intersection de Π respectivement avec les plans Q_1, Q_2, Q_3, Q_4.

On suppose que les équations des plans Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sont respectivement

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0, \qquad T = 0,$$

X, Y, Z, T étant quatre formes linéaires (de x, y, z, t) indépendantes, choisies de façon que le plan Π ait pour équation $X + Y + Z + T = 0$. Tout point de l'espace peut être défini par ses coordonnées (X, Y, Z, T), c'est-à-dire par les valeurs qu'il donne aux quatre formes. Les restrictions dans Π des formes X, Y, Z, T sont identifiées aux formes F, G, H, E de la partie III.

Les six points I, J, K, I', J', K', les faisceaux (f), (g), (h), les cycles dans Π, ainsi que la correspondance entre cycles et matrices R, sont définis comme dans la partie III.

On désigne par Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 les plans qui ont respectivement pour équations

$$\begin{aligned} -X + Y + Z + T &= 0, \\ X - Y + Z + T &= 0, \\ X + Y - Z + T &= 0, \\ X + Y + Z - T &= 0. \end{aligned}$$

1° On considère dans le plan Π une division de quatre points A, B, C, D tels que (A, B, C), (B, A, D) soient des cycles au sens de la partie III. Les droites O_1A, O_2B, O_3C, O_4D coupent respectivement Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 aux points A′, B′, C′, D′.

Démontrer que ces quatre points sont alignés.

On pourra utiliser la matrice $R - \Omega$ étudiée dans I, 3°.

2° On donne, hors du plan Π, une droite L coupant les quatre plans Π_i aux points l_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Soit λ_i le point d'intersection de la droite $O_i l_i$ avec le plan Π.

On suppose que les trois points λ_1, λ_2, λ_3 sont sur une même droite ne passant par aucun des points de base des faisceaux (f), (g), (h); montrer que ces trois points forment alors un cycle et préciser la position du point λ_4.

3° On revient aux points alignés A′, B′, C′, D′ de IV, 1°. Trouver le lieu des droites A′B′C′D′ correspondant à toutes les divisions ABCD portées par une droite Δ du plan Π, donnée par ses équations :

$$\begin{cases} X + Y + Z + T = 0, \\ \alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0. \end{cases}$$

UNIVERSITE DE POITIERS
MATHEMATIQUES

1988-1989

PREPARATION A L'AGREGATION

Problème d'Analyse

Agrégation 1965, 2ème comp. (Analyse & probabilités)

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES - 1965 -

Analyse.

— Il est rappelé que la présentation et la rédaction sont des éléments importants d'appréciation de la copie.

N désigne l'ensemble des entiers naturels, **R** l'ensemble des nombres réels, **C** l'ensemble des nombres complexes. On appelle $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions définies sur **R**, à valeurs dans **C**; si f appartient à $\mathcal{F}$, on note ${}_af$ l'élément de $\mathcal{F}$ défini par

$$a \in \mathbf{R} \text{ et } \forall x \in \mathbf{R}, \quad {}_af(x) = f(x+a).$$

Lorsque l'ensemble

$$\{|f(x) - g(x)|;\ x \in \mathbf{R}\} \quad (f \in \mathcal{F},\ g \in \mathcal{F})$$

admet dans **R** une borne supérieure, elle sera désignée par $\|f - g\|$.

I. — 1° Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{F}$. A tout $\varepsilon > 0$, on associe l'ensemble $E(\varepsilon)$, *qui dépend de* f, des nombres réels τ vérifiant

$$\|f - {}_\tau f\| \leqslant \varepsilon.$$

Montrer que, si $E(\varepsilon)$ contient τ, il contient $-\tau$, que $b - a$ appartient à $E(\varepsilon)$ si, et seulement si,

$$\|{}_bf - {}_af\| \leqslant \varepsilon,$$

et que, si τ_1 appartient à $E(\varepsilon_1)$ et si τ_2 appartient à $E(\varepsilon_2)$, alors $\tau_1 + \tau_2$ appartient à $E(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$.

2° On dit qu'une fonction f de $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{L}$ (sous-ensemble de $\mathcal{F}$) si :

a) elle est continue;

b) quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel positif l dépendant de ε, tel que, pour tout α réel, l'intervalle $[\alpha, \alpha + l[$ contienne au moins un élément de $E(\varepsilon)$.

Montrer que toute fonction de $\mathcal{F}$, continue et périodique, appartient à $\mathcal{L}$.

Montrer que, si $\mathcal{L}$ contient f, il contient aussi :

$$|f|, \quad \bar{f} \text{ (fonction conjuguée)}, \quad {}_af\ (\forall a;\ a \in \mathbf{R}), \quad kf (\forall k;\ k \in \mathbf{C}).$$

3° Montrer que, si la suite $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ de fonctions de $\mathcal{L}$ converge uniformément sur **R** vers une fonction f, alors f appartient à $\mathcal{L}$.

4° Soit f une fonction de $\mathcal{L}$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'à tout nombre réel a, on peut associer un nombre réel b, appartenant à l'intervalle $[0, l[$, de façon que

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \|{}_bf - {}_af\| \leqslant \varepsilon.$$

5° Montrer que toute fonction de $\mathcal{L}$ est bornée sur **R** et uniformément continue sur **R**.

Montrer que, étant donné $\varepsilon > 0$, on peut lui associer $\eta > 0$, de façon que l'intervalle $[-\eta, +\eta]$ soit contenu dans $E(\varepsilon)$.

Montrer que, étant donné $\varepsilon > 0$, on peut déterminer $\delta > 0$ et $L > 0$ de façon que, pour tout α réel, l'intervalle $[\alpha, \alpha + L[$ contienne un intervalle $[\beta, \beta + \delta[$ inclus dans $E(\varepsilon)$.

II. — On considère l'ensemble $\mathcal{B}$ des fonctions définies sur $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{C}$, continues et bornées, muni de la topologie de la convergence uniforme.

On dit qu'une partie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{B}$ possède la propriété (Π) si, à tout nombre $\varepsilon > 0$, on peut associer un ensemble fini $\{f_i;\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ de points de $\mathcal{M}$, de façon que les boules ouvertes de centre f_i, de rayon ε, constituent un recouvrement de $\mathcal{M}$.

1° *a*) Démontrer que $\mathcal{B}$ est complet.

b) Montrer qu'une partie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{B}$ vérifie la propriété (Π) si, et seulement si, son adhérence est un ensemble compact.

2° Soit f une fonction de $\mathcal{B}$; on appelle $A(f)$ l'ensemble des ${}_af$ quand a varie dans $\mathbf{R}$. Montrer que $A(f)$ vérifie la propriété (Π) si, et seulement si, f appartient à $\mathcal{L}$.

Montrer que $\mathcal{L}$ contient, avec deux éléments, leur somme et leur produit.

3° *a*) Montrer que, si la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{i\lambda_n x} \quad (a_n \in \mathbf{C},\ \lambda_n \in \mathbf{R})$$

est uniformément convergente sur $\mathbf{R}$, sa somme définit une fonction de $\mathcal{L}$.

b) Montrer que la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i\frac{x}{n}}}{n^2}$$

appartient à $\mathcal{L}$ et n'est pas périodique.

4° Comment peut-on caractériser l'ensemble $\mathcal{L}$, non plus seulement dans $\mathcal{B}$ comme en II, 2°, mais dans l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{R}$, à valeurs complexes?

III. — Dans cette partie, f désigne une fonction de $\mathcal{L}$, t un nombre réel strictement positif; on pose

$$K = \|f\| = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)|, \qquad \varphi(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(x)\,dx.$$

1° Dans le cas particulier où f est une fonction continue périodique, montrer que $\varphi(t)$ admet une limite quand t tend vers $+\infty$. Calculer cette limite, pour toute valeur du réel λ, lorsque la fonction f est définie par

$$f(x) = e^{i\lambda x}.$$

2° *a*) Soit T un nombre réel strictement positif; à tout réel positif t', on associe la partie entière n de $\frac{t'}{T}$. Montrer que

$$|\varphi(t') - \varphi(nT)| < \frac{2K}{n}.$$

b) Montrer que

$$\forall \alpha \in \mathbf{R}, \qquad \forall \varepsilon > 0, \qquad \forall t > 0,$$
$$\left|\int_0^t f(x)\,dx - \int_\alpha^{\alpha+t} f(x)\,dx\right| \leqslant \varepsilon t + 2Kl.$$

c) En déduire, en décomposant l'intervalle $[0, nt]$ en n intervalles égaux de longueur t, que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad \forall t > 0, \qquad |\varphi(t) - \varphi(nt)| \leqslant \varepsilon + \frac{2Kl}{t}.$$

d) Montrer que, étant donné $\varepsilon' > 0$, on peut déterminer n_0, puis t_0, de façon que, pour tout couple (t', t'') vérifiant $t' \geqslant n_0 t_0$, $t'' \geqslant n_0 t_0$, on ait

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \leqslant \varepsilon'.$$

En déduire que, quand t tend vers $+\infty$, $\varphi(t)$ admet une limite $M(f)$ et que

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad |\varphi(t) - M(f)| \leqslant \varepsilon + \frac{2Kl}{t}.$$

3° Montrer que $M : f \to M(f)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}$.

4° Montrer que, pour tout a de $\mathbf{R}$, $M(f) = M({}_af)$ et que la convergence de

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(x + a)\,dx$$

vers $M(f)$ est uniforme sur $\mathbf{R}$.

5° Montrer que

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(x + u)\bar{f}(u)\,du$$

admet une limite $\gamma(x)$ quand t tend vers $+\infty$, que la convergence est uniforme par rapport à x sur $\mathbf{R}$, que γ appartient à $\mathcal{L}$ et que

$$M(\gamma) = |M(f)|^2,$$
$$|\gamma(x)| \leqslant \gamma(0) = M(|f|^2).$$

IV. — Soit f une fonction de $\mathcal{L}$. On pose, pour tout λ réel,

$$a(\lambda) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(x) e^{-i\lambda x}\, dx.$$

1° Dans le cas particulier où f est une fonction continue de période 2π, déterminer $a(\lambda)$ pour les valeurs entières de λ et montrer que $a(\lambda) = 0$ quand λ n'est pas un entier.

2° On pose

$$\mathrm{P}_k(x) = \sum_{n=0}^{k} b_n e^{i\lambda_n x} \quad (b_n \in \mathbf{C},\ \lambda_n \in \mathbf{R}).$$

Calculer $\mathrm{M}(|f - \mathrm{P}_k|^2)$. Comment doit-on choisir les nombres complexes b_n pour que, f et λ_n étant donnés, $\mathrm{M}(|f - \mathrm{P}_k|^2)$ soit minimal? Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} |a(\lambda_k)|^2 \leqslant \mathrm{M}(|f|^2).$$

3° Montrer qu'à toute fonction de $\mathcal{L}$ on peut associer un ensemble dénombrable Λ tel que λ appartient à Λ si, et seulement si, $a(\lambda) \neq 0$. Quand λ parcourt Λ, la famille des fonctions $a(\lambda)e^{i\lambda x}$ est dite associée à la fonction f.

Montrer que, pour toute bijection $n \to \lambda_n$ de N sur Λ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a(\lambda_n)|^2 \leqslant \mathrm{M}(|f|^2).$$

Déterminer la famille associée à la somme de la série uniformément convergente sur R

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{i\lambda_n x} \quad (a_n \in \mathbf{C},\ \lambda_n \in \mathbf{R}).$$

Connaissant la famille associée à une fonction f, déterminer la famille associée à la fonction γ définie en III, 5°.